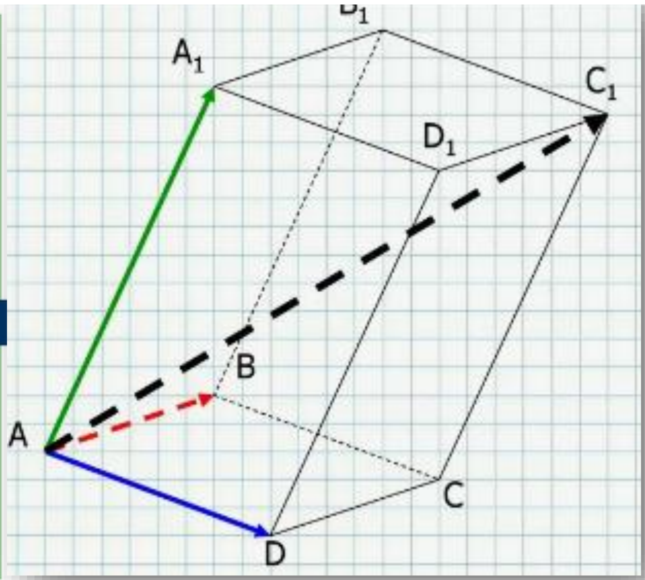
Вектора
Решение планиметрических и стереометрических задач



МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для старшеклассников

Учитель математики
МАОУ «СОШ №9» **Скворцова Елена Анатольевна**

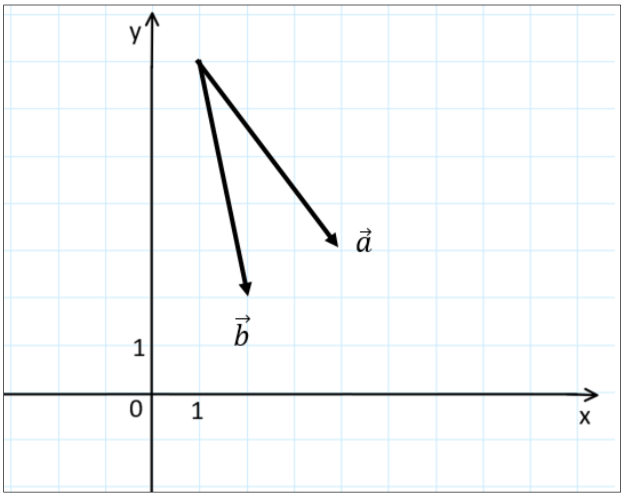
2025, ГО Краснотурьинск

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВЕКТОРА НА ПЛОСКОСТИ.
РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Рассмотрим решение некоторых прототипов задач с векторами и подберем задания для самостоятельного решения.

<u>Задание 1.</u> На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



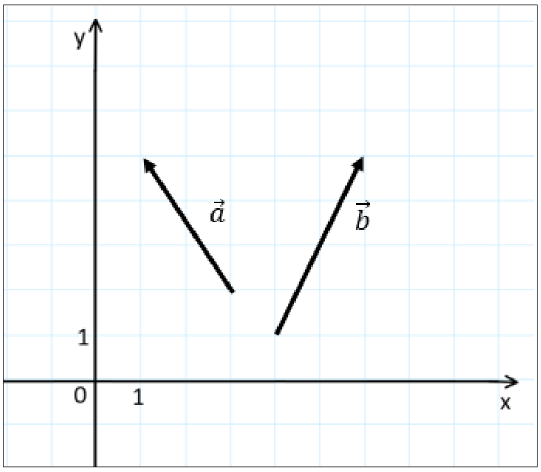
<u>Решение:</u>

Для решения задачи необходимо в начале определить координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом $\vec{a}(3;\ -4), \vec{b}(1;\ -5)$. Найдем скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-5) = 3 + 20 = 23$.

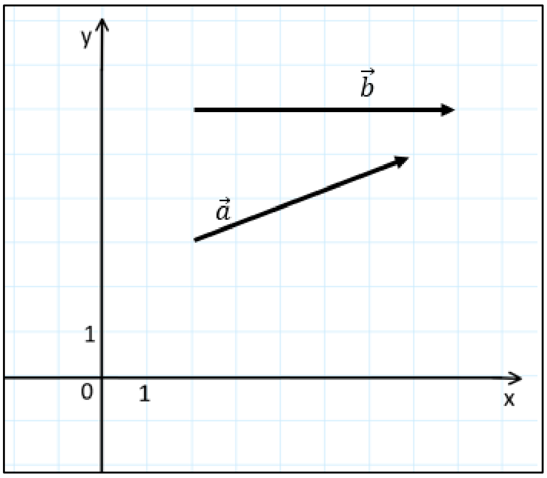
Ответ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 23$.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

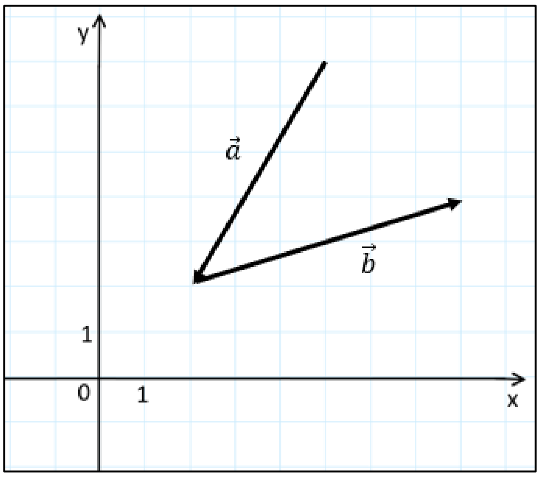
1. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (Ответ: 8).



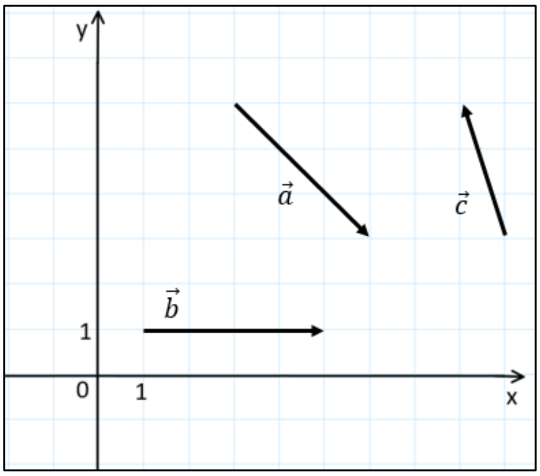
2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (Ответ: 30).



3. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (Ответ: -28).



Задание 2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.



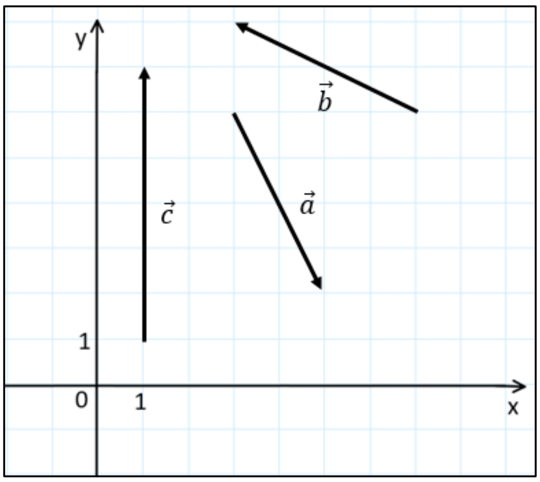
Решение:

Для решения задачи необходимо в начале определить координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Таким образом $\vec{a}(3;\ -3), \vec{b}(4;\ 0), \vec{c}(-1; 3)$. Найдем координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=(3+4-(-1);\ -3+0-3)$. Вектор $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ имеет следующие координаты $(8;\ -6)$. Далее найдем длину вектора $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$.

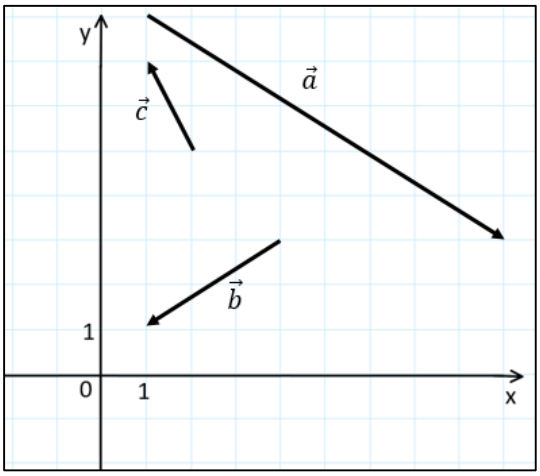
Ответ: $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=10$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. (Ответ: 6).



2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$. (Ответ: 13).



<u>Задание 3.</u> Длины векторов $\vec{a}, \vec{b}$ равны соответственно 11 и 7, а их скалярное произведение равно 53. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

<u>Решение:</u>

$$|\vec{c}| = \sqrt{\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2} = \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2} = \sqrt{11^2 + 4 \cdot 53 + 4 \cdot 7^2} =$$

$$\sqrt{121 + 212 + 196} = \sqrt{529} = 23.$$

Ответ: $|\vec{c}| = 23$.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. Длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ равны соответственно 5 и 8, а их скалярное произведение равно 12. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$. (Ответ: 19).

2. Длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ равны соответственно 16 и 6, а их скалярное произведение равно 24. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$. (Ответ: 8).

<u>Задание 4.</u> Даны векторы $\vec{m}(6;\ -2), \vec{n}(-1;\ 4)$ и $\vec{k}(x;\ -2)$. Найдите x, если $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{k} = 0$.

<u>Решение:</u>

Найдем координаты вектора $(\vec{m} + \vec{n}) = (6 + (-1); (-2) + 4) = (5; 2)$. Далее найдем $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{k} = 5 \cdot x + 2 \cdot (-2) = 5 \cdot x - 4$. По условию задачи

$(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{k} = 0$. Составим уравнение и выразим x: $5 \cdot x - 4 = 0$, отсюда $x = 0{,}8$.

Ответ: $x = 0{,}8$.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. Даны векторы $\vec{m}(-4;\ -3), \vec{n}(-2;\ 2)$ и $\vec{k}(x;\ 3)$. Найдите x, если $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{k} = 0$. (Ответ: $-0{,}5$).

2. Даны векторы $\vec{m}(-4;\ -3), \vec{n}(-2;\ 2)$ и $\vec{k}(x;\ 3)$. Найдите x, если $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{k} = 0$. (Ответ: 4).

<u>Задание 5.</u> Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}\ (6;\ -8)$ и $\vec{q}\ (0;\ 2)$.

<u>Решение:</u>

Для нахождения косинуса угла между векторами будем использовать следующую формулу:

$$cos\angle(\vec{p};\ \vec{q}) = \frac{\vec{p}\ \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot\ |\vec{q}|}$$

Найдем чему равно скалярное произведение векторов: $\vec{p}\ \cdot \vec{q} = 6 \cdot 0 + (-8) \cdot 2 = 0 - 16 = -16$.

Найдем модули векторов:

$$|\vec{p}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{0^2 + (2)^2} = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

Найдем косинус угла между векторами:

$$cos\angle(\vec{p};\ \vec{q}) = \frac{-16}{10 \cdot\ 2} = -0{,}8$$

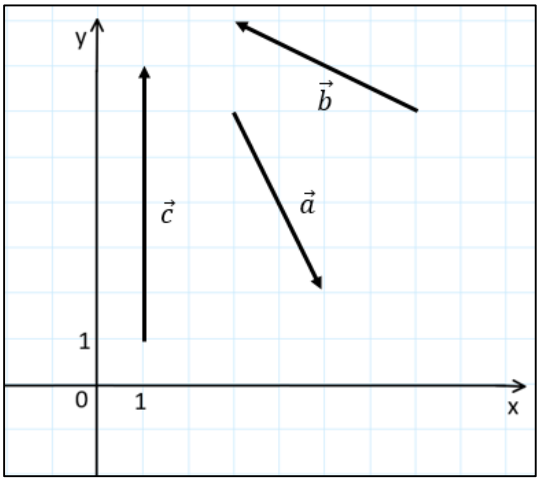
Ответ: $cos\angle(\vec{p};\ \vec{q}) = -0{,}8$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}\ (-3;\ 4)$ и $\vec{q}\ (-9;\ -12)$. (Ответ: $-0{,}28$).

2. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}\ (33;\ -54)$ и $\vec{q}\ (-10;\ -24)$. (Ответ: $0{,}6$).

Задание 6. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$.



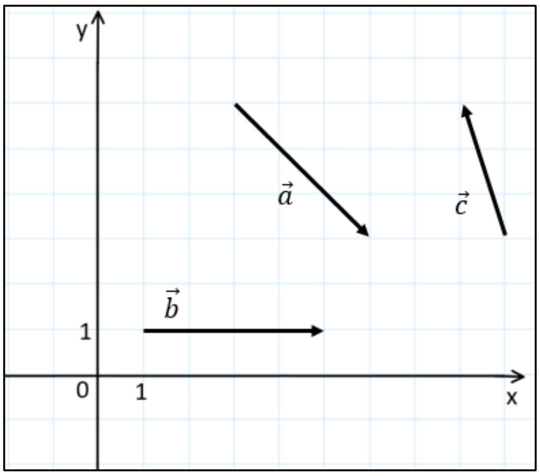
Решение:

Для решения задачи необходимо в начале определить координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Таким образом $\vec{a}(2;\ -4), \vec{b}(-4;\ 2), \vec{c}(0; 6)$. Найдем координаты вектора $\vec{b}+\vec{c}=\big((-4)+0;\ 2+6\big)$. Вектор $\vec{b}+\vec{c}$ имеет следующие координаты $(-4;\ 8)$. Найдем скалярное произведение: $\vec{a}\cdot\big(\vec{b}+\vec{c}\big)=2\cdot(-4)+(-4)\cdot 8=-8-32=-40$.

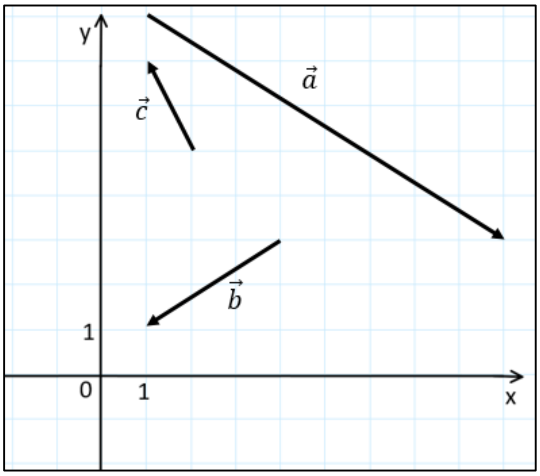
Ответ: $\vec{a}\cdot\big(\vec{b}+\vec{c}\big)=-40$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$. (Ответ: -8).



2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{c}$. (Ответ: 17).



<u>Задание 7.</u> Даны векторы $\vec{m}(6;\ -2), \vec{n}(-1;\ 4), \vec{k}(-2;\ 8)$ и $\vec{p}(1;\ 4)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.

<u>Решение:</u>

Найдем координаты вектора $(\vec{m} + \vec{n}) = (6 + (-1); (-2) + 4) = (5; 2)$. Найдем координаты вектора $(\vec{k} + \vec{p}) = \left((-2) + 1; 8 + 4\right) = (-1; 12)$.

Найдем скалярное произведение: $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \left(\vec{k} + \vec{p}\right) = 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 12 = -5 + 24 = 19$.

Ответ: $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \left(\vec{k} + \vec{p}\right) = 19$.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. Даны векторы $\vec{m}(8;\ 5), \vec{n}(-4;\ -7), \vec{k}(-2;\ 3)$ и $\vec{p}(-1;\ -1)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m}\ +\ \vec{n})\ \cdot\ (\vec{k}\ +\ \vec{p})$. (Ответ: -16).

2. Даны векторы $\vec{m}(-9;\ 2), \vec{n}(-4;\ 4), \vec{k}(11;\ -8)$ и $\vec{p}(-5;\ -4)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m}-\ \vec{n})\ \cdot\ (\vec{k}\ +\ \vec{p})$. (Ответ: -6).

<u>Задание 8.</u> Даны векторы $\vec{f}(-8;\ 7)$ и $\vec{e}(-1;\ -0{,}5)$. Найдите координаты вектора $\vec{g}\ =\ -5\vec{f}\ +\ 8\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

<u>Решение:</u>

Найдем координаты вектора $-5\vec{f} = \big((-5)\cdot(-8); (-5)\cdot 7\big) = (40;\ -35)$.

Найдем координаты вектора $8\vec{e} = \big(8\cdot(-1); 8\cdot(-0{,}5)\big) = (-8; -4)$.

Найдем координаты вектора $\vec{g} = \big(40 + (-8); (-35) + (-4)\big) = (32;\ -39)$. Найдем сумму координат вектора $\vec{g} = 32 + (-39) = -7$.

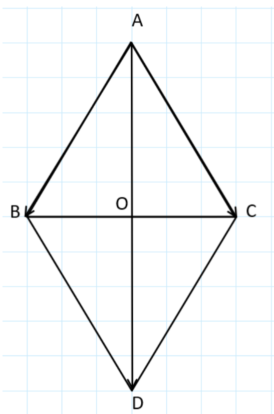
Ответ: Сумма координат вектора $\vec{g} = -7$.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. Даны векторы $\vec{f}(-5;\ 7)$ и $\vec{e}\left(\frac{1}{3};\ 2\right)$. Найдите координаты вектора $\vec{g}\ =\ -5\vec{f}\ +\ 6\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$. (Ответ: 4).

2. Даны векторы $\vec{f}(-2{,}5; 0{,}5)$ и $\vec{e}(14;\ -12)$. Найдите координаты вектора $\vec{g}\ =\ 6\vec{f}\ +\ 2{,}5\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$. (Ответ: -7).

<u>Задание 9.</u> Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.



<u>Решение:</u>

Сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ будем искать по правилу параллелограмма, поэтому достроим треугольник ABC до ромба ACDB, в котором вектор $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Чтобы найти длину вектора $\overrightarrow{AD}$ рассмотрим

ΔAOB, он прямоугольный (так как диагонали ромба перпендикулярны). $AB = 6\sqrt{3}, BO = 3\sqrt{3}$, по теореме Пифагора найдем AO. $AO = \sqrt{AB^{\,2} - BO^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{108 - 27} = \sqrt{81} = 9$. $AD = 2 \cdot AO$ (так как диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам), отсюда: $AD = 2 \cdot 9 = 18$.

Ответ: Длина суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равна 18.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

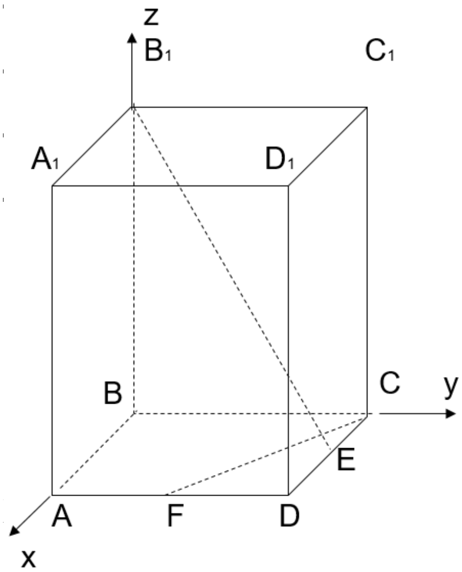
1. Сторона равностороннего треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$. (Ответ: 12).

2. Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$. (Ответ: -54).

2. ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ. РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

2.1. Задача на нахождение угла между скрещивающимися прямыми

Задача



<u>Решение:</u>

Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат, с началом координат в точке B, как показано на рисунке, и найдём искомый угол, как угол между векторами. Выпишем координаты точек B_1, E, C, F в этой системе координат: $B_1\ (0;\ 0;\ 4)$, $E(1;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $F\ (2;\ 1;\ 0)$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{B_1E}$: $\overrightarrow{CF}(2;-1;0)$, $\overrightarrow{B_1E}=(1;2;-4)$. Найдём косинус угла между этими векторами по формуле: $cos\alpha=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=\frac{2\cdot1+(-1)\cdot2+0\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=0.$ Таким образом получается, что искомый угол между прямыми CF и B_1E равен 90°.

основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2, высота 4. Точка E – середина отрезка CD, точка F – середина отрезка AD. Найдите угол между прямыми CF и B_1E.

Ответ: Угол между прямыми CF и B_1E равен 90°.

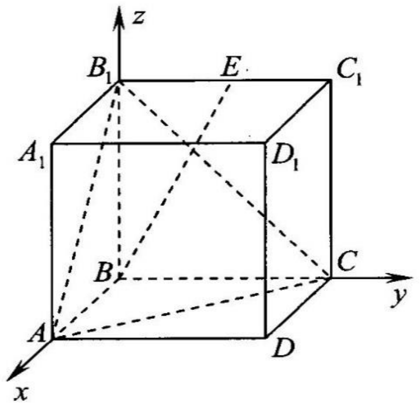
<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB_1и BC_1. (Ответ: 60°).

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK. (Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$).

2.2. Задача на нахождение угла между прямой и плоскостью

Задача. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB и AA_1 равны 1, а ребро $AD = 2$. Точка E – середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой BE и плоскостью AB_1C.



Решение: Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат, с началом координат в точке B, как показано на рисунке.

Для решения этой задачи необходимо воспользоваться уравнением плоскости, имеющим общий вид $ax + by + cz + d = 0$, *где* a, b и c – координаты нормали к плоскости.

Чтобы составить это уравнение, необходимо определить координаты трёх точек, лежащих в данной плоскости: $A(1;\ 0;\ 0), B_1(0; 0; 1), C(0; 2; 0)$. Составим систему уравнений и решим ее: $\begin{cases} a + d = 0, \\ c + d = 0, \\ 2b + d = 0. \end{cases}$

Находим коэффициенты a, b и c уравнения $ax + by + cz + d = 0$: $a = -d$, $b = -\frac{d}{2}, c = -d$. Таким образом, уравнение примет вид: $-dx - \frac{d}{2}y - dz + d = 0$

или, после упрощения, $2x + y + 2z - 2 = 0$. Значит нормаль n к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(2; 1; 2)$.

Найдем длину вектора геометрически (по теореме Пифагора): $\overrightarrow{BE} = \sqrt{BB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{2}$.

Но его координаты нам всё равно необходимы. Из простых вычислений находим, что $\overrightarrow{BE}(0; 1; 1)$.

Найдем угол между вектором и нормалью к плоскости по формуле:

$$sin\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}}$$

$sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, отсюда угол между прямой BE и плоскостью AB_1C равен 45°.

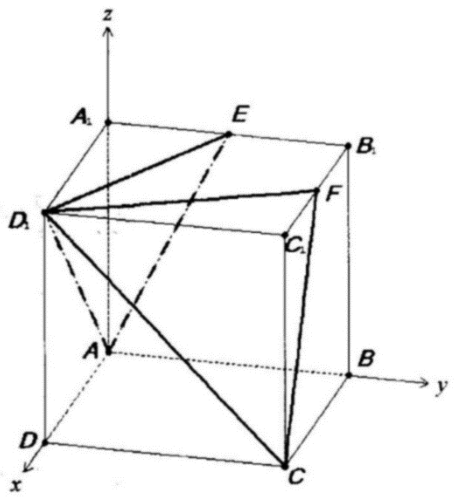
Ответ: Угол между прямой BE и плоскостью AB_1C равен 45°.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В нем $AB = AD = 2, AA_1 = 1$. Найти синус угла между прямой AC_1 и плоскостью AB_1C. (Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{9}$).

2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол φ между прямой AC_1 и плоскостью BDA_1. (Ответ: 90°).

2.3. Задача на нахождение угла между двумя плоскостями



<u>Задача.</u> В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1.

<u>Решение:</u> Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке A, как показано на рисунке. Тогда $A(0;0;0), C(1;1;0), D_1(1;0;1), E(0;0{,}5;1), F(0{,}5;1;1)$.

Для решения этой задачи необходимо уравнения для каждой плоскости.

Для уравнения плоскости AD_1E составим систему уравнений и решим ее: $\begin{cases} d = 0, \\ a + c + d = 0, \\ 0{,}5b + c + d = 0 \end{cases}$, уравнение плоскости AD_1E имеет следующий вид $x + 2y - z = 0$, отсюда нормаль плоскости вектор $\vec{n}$ будет иметь координаты $(1;2;-1)$.

Для уравнения плоскости D_1FC составим систему уравнений и решим ее: $\begin{cases} a + c + d = 0, \\ 0{,}5a + b + c + d = 0, \\ a + b + d = 0 \end{cases}$ уравнение плоскости D_1FC имеет следующий вид $2x + y + z - 3 = 0$, отсюда нормаль плоскости вектор $\vec{m}$ будет иметь координаты $(2;1;1)$.

Найдем искомый угол, как угол между нормалями плоскостей.

$$cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Таким образом угол между плоскостями АD_1Е и D_1FC равен 60°.

Ответ: Угол между плоскостями АD_1Е и D_1FC равен 60°.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. Основание четырёхугольной пирамиды $PABCD$ квадрат со стороной, равной 6, боковое ребро PD перпендикулярно плоскости основания и равно 6. Найдите угол между плоскостями BDP и BCP. (Ответ: 60°).

2. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка М так, что $AM = 8$. На ребре BB_1 взята точка К так, что $B_1K = 8$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1. (Ответ: 45°).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.

2. Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия. – 2004.

3. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

4. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Под редакцией Н.Ш. Кремера – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999.– 471 с.

5. Геометрия. 10-11 классы: учеб. Для образоват. учреждений: базовый профил. уровни/(Л.С.Антансян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.). -22-е изд.Геометрия 7-9 Александров. А.Д. Просвещение, 2019.

6. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. сред. шк. / авт.-сост. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. - 4-е изд. – М.: Просвещение, 2020. - 335 с: ил.

7. Энциклопедический словарь юного математика. Савин. А.П.

8. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. - М.

9. Энциклопедия для детей. т. II. Математика / глав. ред. М. Д. Аксёнова. – М.: Аванта + , 2002. - 688 с: ил.: Педагогика, 1989.-352 с: ил.

10. Векторы в пространстве https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-6-vektory-v-prostranstve-i-dejstvia-nad-nimi [электронный ресурс].

11. Векторы на плоскости и в пространстве https://kursach37.com/work/vektory-na-ploskosti-i-v-prostranstve/ [электронный ресурс].

12. https://infourok.ru/referat-po-matematike-vektori-754057.html [электронный ресурс].