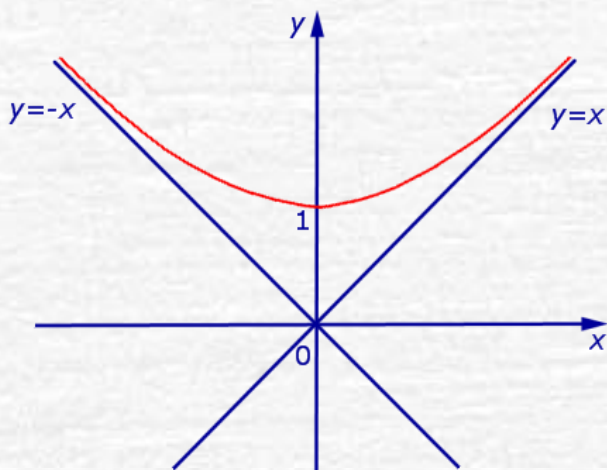


Асимптоты функций (11 класс)



Определение

виды асимптот

Алгоритм нахождения асимптот

Примеры

Жакупова С. А., учитель математики
МАОУ «Гимназия № 3 в Академгородке»
г. Новосибирск

Цель занятия: Научить учащихся находить асимптоты и их применять при исследовании функций и построении графиков

Задачи занятия:

- ✎ *Обучающая:* познакомить учащихся с определениями асимптот, видами асимптот, способами нахождения асимптот; научить исследовать функцию с помощью асимптот; закрепить умение нахождения пределов функции
- ✎ *Воспитательная:* воспитывать графическую культуру учащихся, аккуратность, осознанное отношение к учебной и трудовой деятельности, уверенность в своих силах, стремление к достижению результата;
- ✎ *Развивающая:* развивать аналитическое мышление, умение проводить аналогии, сравнивать, обобщать; активизировать познавательную деятельность учащихся, создавая условия для развития самостоятельности мышления.

Определение 1: Прямая называется **асимптотой графика функции** $y=f(x)$, если расстояние от переменной точки $M(x;f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат по какой-либо ветви графика функции.

Виды асимптот: вертикальные $x=a$, горизонтальные $y=b$ и наклонные $y=kx+b$.

*Очевидно, что горизонтальные являются частными случаями наклонных (при $k=0$),

Вертикальные асимптоты

Определение 2: Пусть функция $y=f(x)$ определена в окрестности или хотя бы в некоторой полукрестности точки $x=a$ и, если хотя бы один из ее односторонних пределов в этой точке бесконечен, т.е. равен $+\infty$ или $-\infty$, то тогда прямая $x=a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции.

*Т.е. прямая $x=a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$$

Вертикальные асимптоты

* Вертикальные асимптоты графика функции можно искать или в **точках разрыва**, или на **границах области определения** (если это конечные числа).

* График функции, **непрерывной на всей числовой прямой**, вертикальных асимптот не имеет.

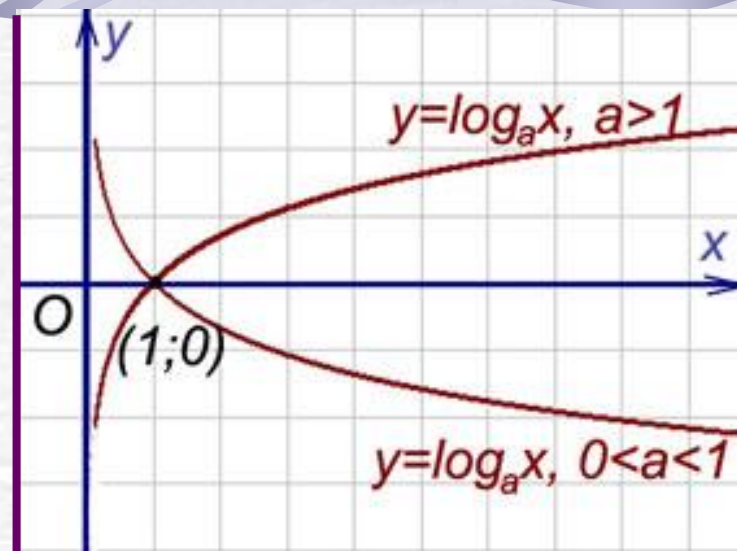


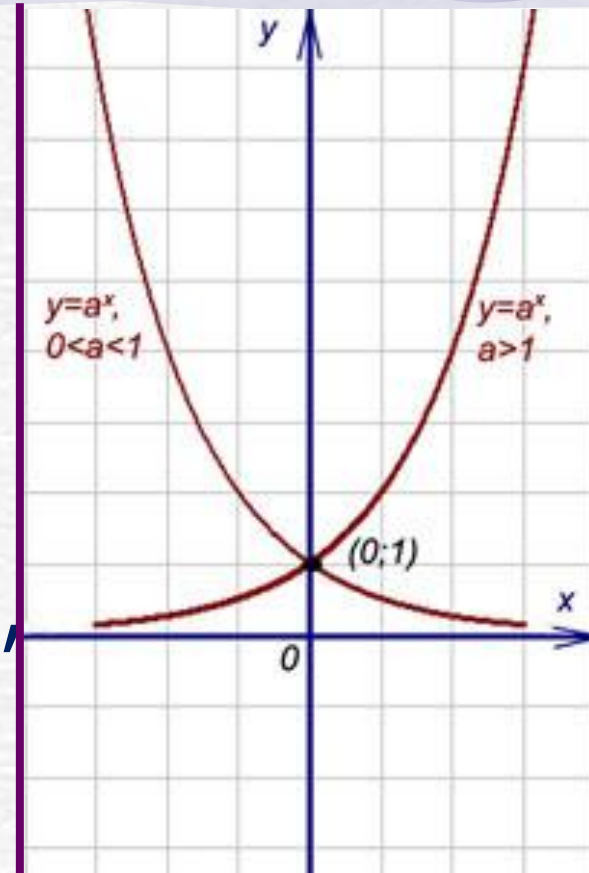
График функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (т.е. совпадающую с осью Oy) на границе области определения, так как предел функции при $x \rightarrow 0$ справа равен $-\infty$:

Горизонтальные асимптоты

Определение 3: Если

существует $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

(конечный предел функции при стремлении аргумента к плюс или минус бесконечности равен некоторому значению b), то **$y=b$** – горизонтальная асимптота кривой $y=f(x)$ (правая при $x \rightarrow +\infty$, левая при $x \rightarrow -\infty$ и двусторонняя, если пределы при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ равны).

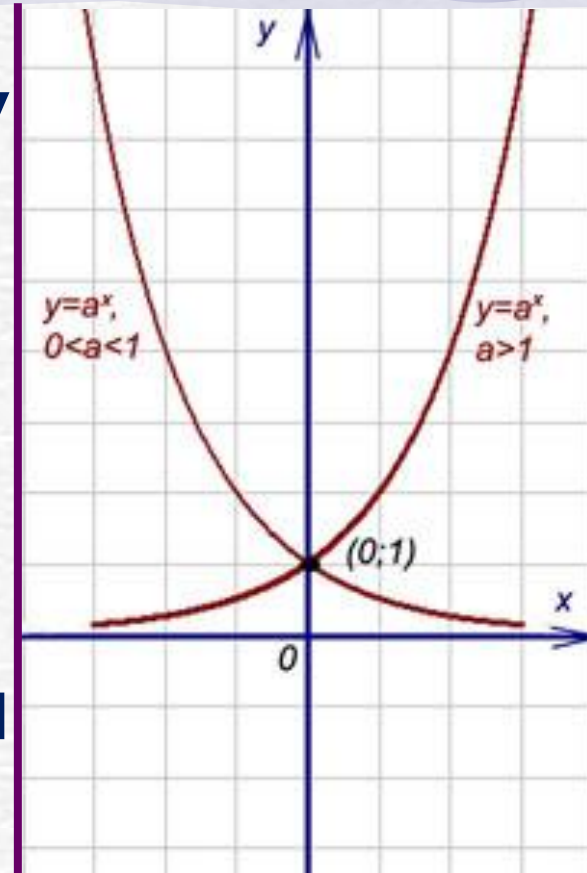


Горизонтальные асимптоты параллельны оси Ox или совпадают с ней

Горизонтальные асимптоты

* Если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_2 \neq b_1$, причём b_1 и b_2 - конечные числа, тогда график имеет две различные горизонтальные асимптоты: левостороннюю и правостороннюю.

* Если существует только один из конечных пределов b_1 или b_2 , то график имеет либо одну левостороннюю, либо одну правостороннюю горизонтальную асимптоту.



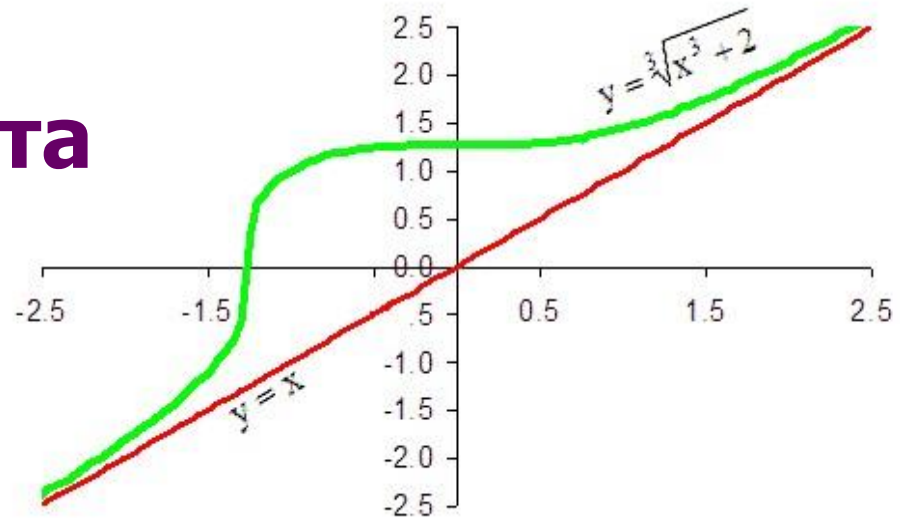
Горизонтальные асимптоты параллельны оси Ох или совпадают с ней

Наклонные асимптоты

Определение 4: Наклонная асимптота

— прямая, к которой неограниченно стремится график функции $f(x)$ по мере того, как x неограниченно возрастает или убывает.

* Функция может иметь и вертикальные, и наклонные асимптоты.



Различают наклонные асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. В ряде случаев график функции может стремиться к одной и той же асимптоте в обе стороны, но они не обязаны совпадать.

Наклонные асимптоты

- Асимптота, как и всякая наклонная прямая, имеет уравнение вида $y = kx + b$, где k и b — константы.
- * Прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если по мере стремления x к бесконечности разность $f(x) - (kx + b)$ стремится к нулю.
- * Аналогично, если эта разность стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$, то прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой функции в этом направлении.

Алгоритм нахождения асимптоты

Константы **k** и **b** являются пределами:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Чтобы кривая $y=f(x)$ имела асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы k и b рассматриваемой функции $y=f(x)$ при стремлении $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$.

* Найденные таким образом числа **k** и **b** и являются коэффициентами наклонной асимптоты **$y=kx+b$** .

Алгоритм нахождения асимптоты

Константы **k** и **b** являются пределами:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

* Если коэффициент **$k=0$** (получается при вычислении нулевым), это значит, что наклонная асимптота заданной функции горизонтальная, и её уравнение **$y=b$** .

* если хотя бы один из указанных пределов бесконечен, то наклонной асимптоты нет.

* Наклонная асимптота так же, как и горизонтальная, может быть односторонней.

Пример 1. Построить график функции $y = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. в точке разрыва $x = 0$ кривая может иметь вертикальную асимптоту, значит, вычислим односторонние пределы (можно было при $x \rightarrow 0+0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left(2x - \frac{1}{x} \right) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика данной функции

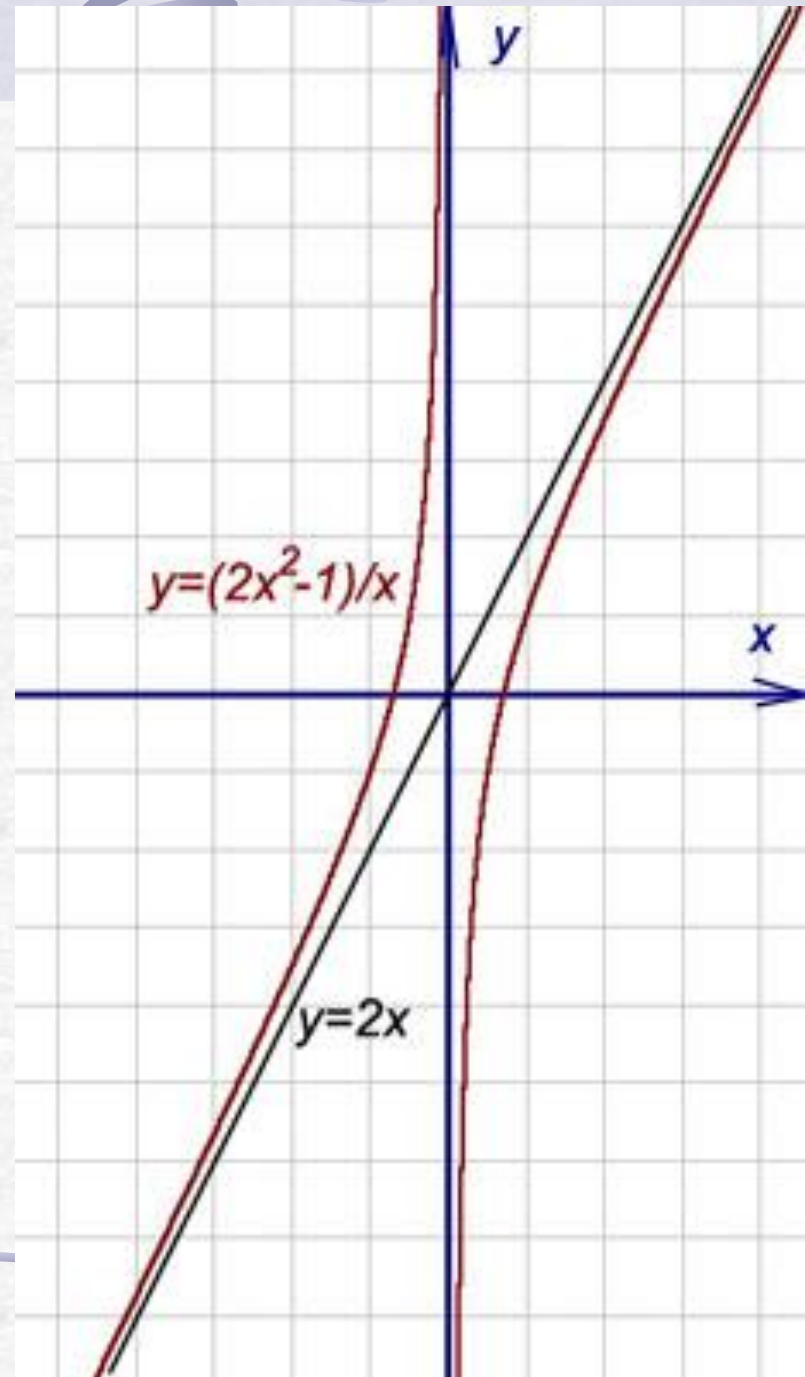
3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2x - \frac{1}{x} \right) = \pm\infty.$

Горизонтальной асимптоты график данной функции не имеет

4. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2} = \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) = 2; \\b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2x - \frac{1}{x} - 2x \right) = 0.\end{aligned}$$

Получили конечные пределы $k = 2$ и $b = 0$. Прямая $y = 2x$ является двусторонней наклонной асимптотой графика данной функции



Пример 2. Построить график функции $y = \frac{2x - 3x^2}{x + 1}$

1. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

2. в точке разрыва $x = -1$ кривая может иметь вертикальную асимптоту, значит, вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{2x - 3x^2}{x + 1} = \frac{2 \bullet (-1) - 3 \bullet (-1)^2}{-1 + 0 + 1} = \frac{-5}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2x - 3x^2}{x + 1} = \frac{2 \bullet (-1) - 3 \bullet (-1)^2}{-1 - 0 + 1} = \frac{-5}{-0} = +\infty$$

Следовательно, $x = -1$ – вертикальная асимптота графика данной функции

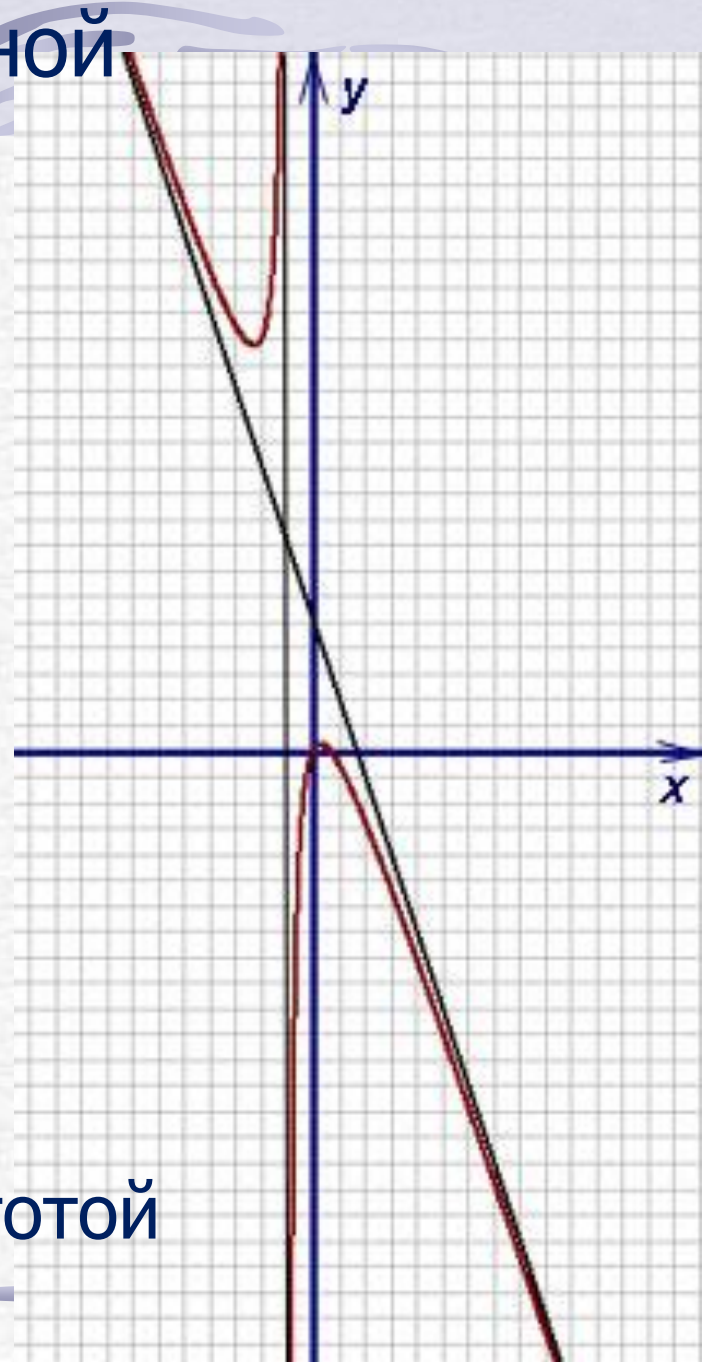
3. Горизонтальной асимптоты график данной функции не имеет, т.к. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

4. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3x^2}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-3x)}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - 3}{1 + \frac{1}{x}} = -3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 3x^2}{x+1} + 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3x^2 + 3x^2 + 3x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x+1} = \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{1 + \frac{1}{x}} = 5. \end{aligned}$$

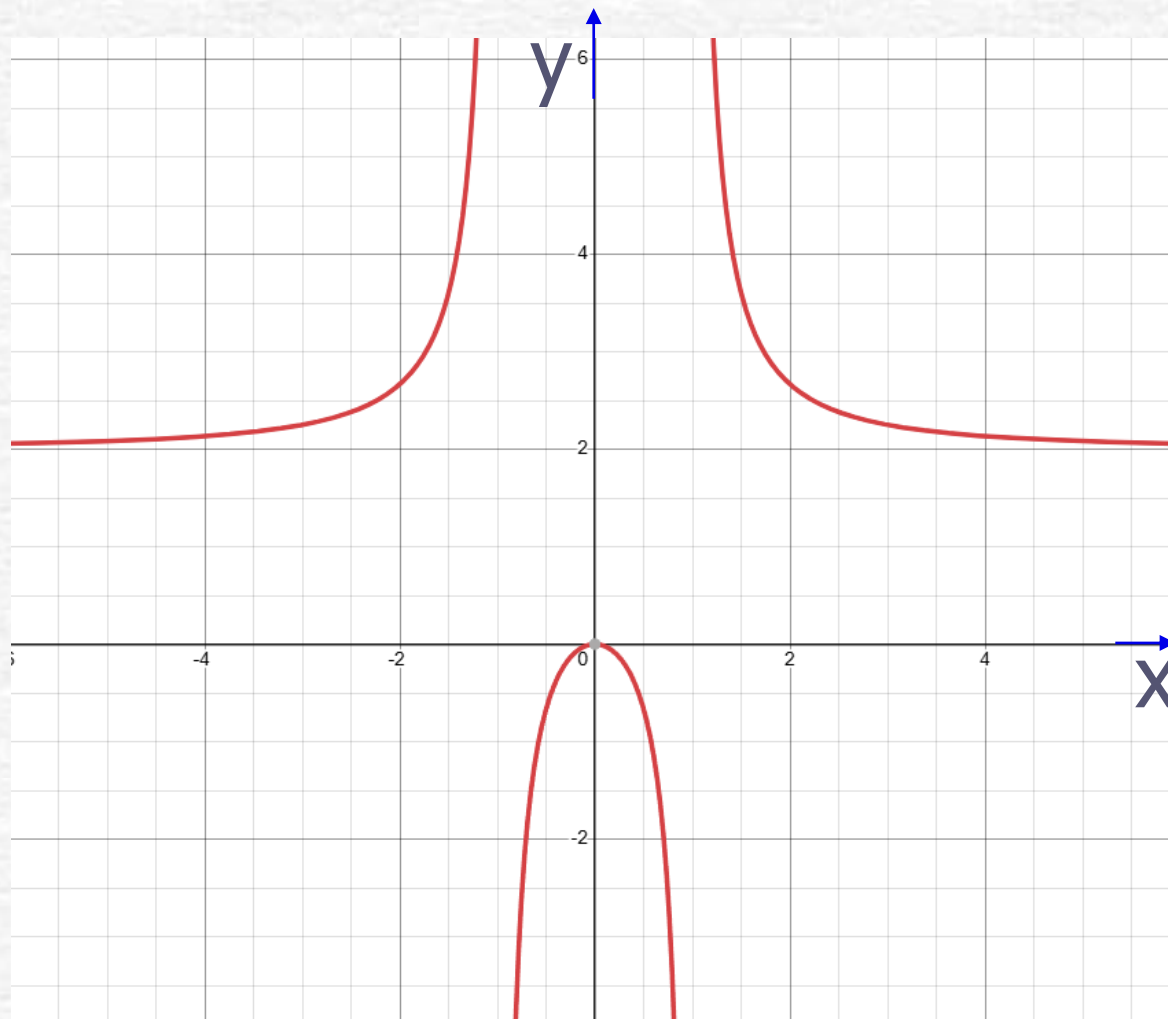
Прямая $y = -3x + 5$ является двусторонней наклонной асимптотой графика данной функции



Пример 3. Построить график функции $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

- 1. $D(f): x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- 2. Так как $\lim_{x \rightarrow -1-0} y = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$ (два других односторонних предела можно уже не находить), то прямые $x = -1$ и $x = 1$ являются вертикальными асимптотами графика функции.
- 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty} \right]}{=} 2$ (делим числитель и знаменатель на x^2)
- Значит, прямая $y = 2$ – горизонтальная асимптота.
- Т.к. горизонтальная асимптота существует, то наклонные уже не ищем (их нет).

Пример 3. Построить график функции $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика: Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразоват. организаций: Базовый и углублённый уровни / С. М. Никольский и др. – М. : Просвещение, 2022, 464 с. : ил. – (МГУ – школе). — ISBN 978-5-09-055144-1.
2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 571 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-18419-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/534966>