Государственное автономное профессиональное образовательное
учреждение Чувашской Республики
«Чебоксарский техникум строительства и городского хозяйства»
Министерства образования Чувашской Республики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
ЕН.01. Математика

специальность

среднего профессионального образования

08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Разработчик:
Лукиянова Виолетта Юрьевна, преподаватель
высшей квалификационной категории

Чебоксары, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Курс предназначен для ознакомления студентов с основными понятиями разделов математики, которые обычно изучаются студентами на втором курсе.

Математические знания, которые студент должен приобрести в результате изучения настоящего курса, призваны сыграть важную роль в процессе его дальнейшего обучения. Они понадобятся ему для успешного изучения общетеоретических и специальных предметов специализации.

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных технических и технологических задач. Поэтому студент должен предвидеть, что и после окончания учебного заведения он не раз столкнется с необходимостью применить свои математические знания в практической деятельности.

Курс математики призван создать у студента прочные навыки логического мышления, столь необходимые каждому специалисту.

Практическое занятие - это такой метод обучения, при котором обучающиеся под руководством преподавателя и по заранее намеченному плану выполняют определенные практические задания и в процессе их воспринимают и осмысливают новый учебный материал.

Практические занятия являются неотъемлемой составляющей процесса освоения программы обучения по специальности. Практические занятия в значительной мере определяют результаты и качество освоения дисциплины. В связи с этим планирование, организация, выполнение и контроль практических занятий студентов приобретают особое значение и нуждаются в методическом руководстве и методическом обеспечении.

Настоящие методические указания освещают виды и формы практических занятий студентов, содержат методические указания по отдельным аспектам освоения дисциплины.

Основная цель методических указаний состоит в обеспечении студентов необходимыми сведениями, методиками для успешного выполнения практической работы, в формировании устойчивых навыков и умений по разным аспектам обучения, позволяющих самостоятельно решать учебные задачи, выполнять разнообразные задания, преодолевать наиболее трудные моменты в отдельных видах практической работы.

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических навыков. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

Проведение практических занятий с целью осмысления нового учебного материала включает в себя следующие методические приемы:

- постановку темы занятий и определение задач практических занятий;
- определение порядка практического занятия или отдельных ее этапов;
- непосредственное выполнение практических занятий учащимися и контроль преподавателя за ходом занятий и соблюдением техники безопасности;
- подведение итогов практических занятий и формулирование основных выводов.

Целями проведения практических занятий являются:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

В ходе практических работ, как одной из форм получения систематических учебных занятий, обучающиеся приобретают необходимые умения и практический опыт по тому или иному разделу дисциплины.

Общие цели практического занятия сводятся к закреплению теоретических знаний, формированию умений и практического опыта, необходимых для осуществления своей профессиональной деятельности.

Основными задачами практических работ являются:

- формирование практических знаний и умений по дисциплине;
- приближение учебного процесса к реальным условиям жизнедеятельности;
- развитие инициативы и самостоятельности обучающихся во время выполнения ими практических занятий.

Перечень практических работ соответствует тематическому плану и содержанию рабочей программы дисциплины.

1. ПЕРЕЧЕНЬ И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Темы	Перечень практических занятий	Количество часов
Тема 1.1. Пределы последовательностей и функций	***Практическое занятие №1, 2*** Вычисление пределов функций с применением различных методов.	4
	Практическое занятие №3, 4 Вычисление пределов функций с использованием замечательных пределов.	4
Тема 1.2. Вычисление и применение производной	***Практическое занятие №5, 6*** Отработка техники дифференцирования. Вычисление производной сложной функции.	4
	Практическое занятие №7. Составление уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке.	2
	Практическое занятие №8. Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.	2
Тема 1.3. Неопределенный и определенный интегралы. Вычисление площадей плоских фигур	***Практическое занятие №9, 10*** Вычисление неопределенного интеграла	4
	Практическое занятие № 11. Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной	2
	Практическое занятие № 12. Вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.	2
	Практическое занятие № 13 Вычисление определенного интеграла	2
	Практическое занятие № 14 Вычисление определенного интеграла методом замены переменной и методом интегрирования по частям	2
	Практическое занятие №15. Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.	2
Всего		30

Тема 1.1. Пределы последовательностей и функций.

Практическое занятие №1, 2
Вычисление пределов функций с применением различных методов.

Цели занятия:
Образовательная: Выработать навыки вычисление пределов функций с применением различных методов
Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности
Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

Основные теоретические понятия: Функция. Обзор элементарных функций.

Числовая последовательность, её предел. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Теоремы о пределах. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых.

Непрерывность функций. Точки разрыва. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Пример: *Вычислить пределы*

а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

а) *Решение:* Для того чтобы раскрыть неопределенность $\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$ необходимо разложить числитель и знаменатель на множители.

Разложим числитель на множители:

$$2x^2-3x-5=0$$

$$D=(-3)-4\cdot 2\cdot(-5)=49 \qquad x_1=-1;\ x_2=\frac{5}{2}$$

$$2x^2-3x-5=2(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)(2x-5)$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

б) *Решение*: Для того чтобы раскрыть неопределенность $\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени**.** Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1^{\to 0}}{x^2}+\frac{1^{\to 0}}{x}+3}=\frac{2}{3}$$

Упражнения

Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+3x})$;

2. а) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\sqrt{7x^2+1}-1}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$;

Вопросы для самопроверки

1. Определение предела последовательности.
2. Определение предела функции при x→ a и при x→∞.
3. Понятие бесконечно малой и бесконечно большой. Примеры.
4. Основные теоремы о пределах.
5. Первый и второй замечательные пределы.
6. Определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Точки разрыва. Непрерывность элементарных функций.

Задание на дом: Н.В. Богомолов: гл.6 §1. №15-23 стр. 75-81, §23. №253-256 стр. 169-171, §2. №36-42 стр. 81-83

Практическое занятие №3, 4
Вычисление пределов функций с использованием замечательных пределов.

Вычисление пределов функции с использованием первого замечательного предела

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Вычисление пределов функций с использованием второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Цели занятия:
Образовательная: Закрепить умения, знания, навыки
Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности
Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

<u>Основные теоретические понятия:</u> Функция. Обзор элементарных функций.

Числовая последовательность, её предел. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Теоремы о пределах. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых.

Непрерывность функций. Точки разрыва. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$ предел

<u>*Решение:*</u> Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя

искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом 7х, значит, в знаменателе тоже нужно получить 7х».

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 4. Вычислить предел

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

Данный факт носит название второго замечательного предела.

Справка: $e=2{,}718281828...$ – это иррациональное число.

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.

Пример 4. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Решение $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$ Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha = 3x$, значит, в показателе тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

страшная степень превратилась в симпатичную букву e :

При этом сам значок предела перемещаем в показатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

e (2-ой замечательный предел)

Упражнения

Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1.а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}\,2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5x+2}{5x-3}\right)^{3x+1}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\mathrm{tg}\,2x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{5x+7}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{8x+2}$.

Вопросы для самопроверки

1. Основные теоремы о пределах.
2. Первый и второй замечательные пределы.
3. Определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Точки разрыва. Непрерывность элементарных функций.

Задание на дом: Н.В. Богомолов: гл.6 §23. №253-256 стр. 169-171, §2. №36-42 стр. 81-83

Тема 1.2. Вычисление и применение производной

Практическое занятие №5, 6.
Отработка техники дифференцирования. Вычисление производной сложной функции.

Цели занятия:

Образовательная: Закрепить умения, знания, навыки

Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности

Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

<u>Основные теоретические понятия:</u> Определение производной функции, её физический и геометрический смысл. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения и частного функций.

Производная сложной и обратной функции. Таблица производных.

Дифференциал функции, его геометрический смысл.

Правило Лопиталя для различных видов неопределённостей.

Исследование функций: условия возрастания и убывания функций, экстремум, выпуклость и вогнутость, точки перегиба, асимптоты.

Пример 1: *Найти производную функции*

$$y = 6x^7 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 9tgx - 11$$

<u>*Решение:*</u> Применяя правила дифференцирования имеем:

$$y' = 6\left(x^7\right)' - 4\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' + 9\left(tgx\right)' - 0$$

Согласно таблице производных имеем:

$$\left(x^7\right)' = 7x^6; \quad \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}; \quad \left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Окончательно: $y' = 6 \cdot 7x^6 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} + 9\frac{1}{\cos^2 x} = 42x^6 + \frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{9}{\cos^2 x}$

Пример 2: *(физические приложения производной)*

Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. *Найти значения скорости и ускорения в момент времени* $t = 4(c)$.

<u>Решение:</u> При прямолинейном движении точки скорость v в данный момент $t=t_0$ есть производная $\frac{ds}{dt}$ от пути S по времени t, вычисленная при $t=t_0$. Ускорение a в данный момент $t=t_0$ есть производная $\frac{dv}{dt}$ от скорости v по времени t, вычисленная $t=t_0$.

Найдем скорость движения точки в любой момент времени t: $v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 + 2t$.

Вычислим скорость движения точки в момент $t=4(c)$: $v(4) = 104$*(м/с).*

Найдем ускорение движения точки в любой момент времени t: $a = \frac{dv}{dt} = 12t + 2$.

Вычислим ускорение движения точки в момент времени $t=4(c)$: a(4)=50*(м/с*^{2}).

Пример 3: *Закон прямолинейного движения тела задан уравнением* $S = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8$. *Найти максимальную скорость движения тела (s-в метрах, t — в секундах).*

<u>Решение:</u> Скорость движения тела есть первая производная от пути по времени:

$v = s' = -3t^2 + 18t - 24$

Исследуем эту функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

$$v' = s'' = -6t + 18; \quad -6t + 18 = 0; \quad t = 3 \qquad v'' = -6$$

Вторая производная отрицательна, следовательно, скорость является наибольшей при t=3. Найдем значение скорости в момент t = 3:

v(3)=-332 + 18-3 -24 = 3 (м/с).

Упражнения

1. Пользуясь основными правилами дифференцирования, вычислить производную функции:

1) $y=\dfrac{\cos x}{x^3}$; 2) $y=x^3\cdot\ln 5x$.

2. Найти производную сложной функции:

1) $y=\ln(x^2+5)$; 2) $y=e^{ctgx}$.

3. Найти производную функцию:

1) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3}+\ln\dfrac{2x+3}{5}$; 2) $2e^{\frac{1-x}{3}}+3\cos\dfrac{1-x}{2}$; 3) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2-x}}-3\cos\dfrac{x-2}{3}$;

4) $0{,}5^x\cdot\cos 2x$; 5) $\ln(\sin x)$; 6) $\sin(\ln x)$; 7) $\dfrac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$.

4. Найти производные функции f(x) в точке x_0:

1) $f(x)=e^{2x-4}+2\ln x, x_0=2$; 2) $f(x)=e^{3x-2}-\ln(3x-1), x_0=\dfrac{2}{3}$;

3) $f(x)=2^x-\log_2 x, x_0=1$; 4) $f(x)=\log_{0,5} x-3^x, x_0=1$.

Вопросы для самопроверки

1. Определение производной. Её геометрический смысл, её механический смысл.
2. Производная суммы, произведения, частного.
3. Производная сложной функции.
4. Таблица производных основных элементарных функций.
5. Определения возрастающей и убывающей на отрезке функции. Достаточные признаки возрастания и убывания.
6. Определения точки максимума и точки минимума функции. Экстремум. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.

Задание на дом: Н.В. Богомолов: гл.7 §2-3, №18-22 стр. 92-98, §4, №34-36 стр. 98-100, §5-7, №43-47 стр. 100-101, 180-187, гл.10, §1, стр180

Практическое занятие №7.

Составление уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке.

Цели занятия:

Образовательная: Научить составлять уравнение касательной и нормали, находить наибольшее и наименьшее значение на отрезке.

Воспитательная: Формирование нравственных качеств

Развивающая: Развитие самостоятельности и инициативности

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

Основные теоретические понятия: Понятие уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке.

Задание№1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x^2+2y^2x+3y^4=6$ в точке $M(1;-1)$.

<u>Решение:</u> Из уравнения кривой найдем производную: $2x+2y^2+4x\cdot y\cdot y'+12y^3\cdot y'=0$, т.е. $y'=-\dfrac{x+y^2}{2xy+6y^3}$. Следовательно, $y'_0=-\dfrac{1+(-1)^2}{2\cdot1\cdot(-1)+6\cdot(-1)^3}=\dfrac{1}{4}$.

Уравнение касательной записывается в виде: $y+1=\dfrac{1}{4}(x-1)$, или $x-4y-5=0$,

а уравнение нормали - в виде $y+1=-4(x-1)$, или $4x+y-3=0$.

Задание№2. Показать, что касательная к параболе $y=x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\dfrac{x_0}{2}$.

<u>Решение:</u> Пусть $f(x)=x^2$, тогда $f'(x)=2x$, $f(x_0)={x_0}^2$ и $f'(x_0)=2x_0$. Находим уравнение касательной: $y=x_0^2+2x_0(x-x_0)=2x_0x-x_0^2$.

Найдем точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Из равенства $2x_0x-x_0^2=0$ находим $x=\dfrac{x_0}{2}$.

Задание№3. Найти угол между касательной к графику функции $y=\sin x$ в точке (0;0) и осью О*x*.

<u>Решение:</u> Найдем угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sin x$ в точке (0;0), т.е. значение производной этой функции при *x*=0. Производная функция $y=\sin x$ равна $y'=\cos x$. По формуле $f'(x)=tg\alpha$ находим $tg\alpha=f'(0)=\cos 0=1,\ \alpha=arctg1=\dfrac{\pi}{4}$.

Упражнения

1.Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x)=x^3, x_0=1$; 2) $f(x)=\ln x, x_0=1$;

2.Найти угол между касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью О*x*:

1) $f(x)=e^{\frac{3x-1}{2}}, x_0=0$; 2) $f(x)=\ln(2x+1), x_0=2$;

3) $f(x)=2\sqrt{x}, x_0=3$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3, x_0=1$.

3.Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x)=\sin x, x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

2) $f(x)=\ln x, x_0=1$;

3) $f(x)=x-3x^2, x_0=2$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+x, x_0=0$;

5) $f(x)=\sin 2x-\ln(x+1), x_0=3$.

Задание№4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x-x^3$ на отрезке $[-2;3]$.

Решение: $f'(x)=3-3x^2$; $3-3x^2=0$; Т.е. $x=\pm 1$ - стационарные точки. Определяем значения функции в этих точках: $f(-1)=-2$; $f(1)=2$. Вычисли значения данной функции на границах промежутка: $f(-2)=2$; $f(3)=-18$. Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее равно -18.

Задание№5.Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ на отрезке $[2;4]$.

Решение: $f(2)=2{,}5$, $f(4)=4{,}25$. $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $1-\dfrac{1}{x^2}=0$, $x_1=-1, x_2=1$. На интервале (2;4) стационарных точек нет. Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

Упражнения

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

1. $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16, \quad [1,\ 4].$
2. $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}, \quad [1,\ 4].$
3. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1, \quad [0,\ 6].$
4. $y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}, \quad [-3,\ 3].$
5. $y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}, \quad [-1,\ 5].$
6. $y=2\sqrt{x}-x, \quad [0,\ 4].$
7. $y=x-4\sqrt{x}+5, \quad [1,\ 9].$
8. $y=\dfrac{10x}{1+x^2}, \quad [0,\ 3].$
9. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2, \quad [-3,\ 3].$

Задание на дом*:* Богомолов: §3-8, №33, 44-51, 55, 6071-75, стр. 110-118

Вопросы для самопроверки

1. Уравнение касательной к кривой.
2. Нормаль к кривой.
3. Уравнение нормали.
4. Угол между двумя кривыми.
5. 1.Правила для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции.
6. 2. Критическими точками называют…
7. 3. Если значения функции неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция…

Тема 1.3. **Неопределенный и определенный интегралы. Вычисление площадей плоских фигур.**

Практическое занятие № 9,10.
Вычисление неопределенного интеграла.

Цели занятия:
Образовательная: Выработать навыки вычисление неопределенного интеграла
Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности
Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

Основные теоретические понятия: Первообразная. Неопределённый интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

Определение определённого интеграла, его свойства.

Формула Ньютона - Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

Геометрические и физические приложения определённого интеграла.

Пример 1: *Вычислить неопределенный интеграл* $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+4\sin x\right)dx$

Решение: Воспользуемся свойствами неопределенных интегралов и таблицей интегралов.

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+4\sin x\right)dx=\int 2x^{-\frac{1}{2}}dx-\int\left(\frac{1}{x}\right)dx+\int 4\sin x dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\ln|x|-4\cos x+C=4\sqrt{x}-\ln|x|-4\cos x+C$$

Упражнения
Вычислить неопределенный интеграл

1. $\int\frac{x^2+x\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$
2. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{1}{e^x}\right)dx$
4. $\int\frac{x^2-x\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^{-1/2}}}{x\sqrt{x}}dx$
3. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{e^x}\right)dx$
5. $\int\frac{1-5x^3}{x^4}dx$
6. $\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-x\right)dx$
7. $\int\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)dx$
8. $\int\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)dx$

Задание на дом*:* Богомолов: §1-7, №33, 16-21 стр. 193-194

Вопросы для самопроверки

1. Неопределенный интеграл…
2. Таблица основных формул неопределенного интеграла

Практическое занятие № 11.
Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной.

Цели занятия:

Образовательная: Закрепить умения, знания, навыки

Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности

Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

Основные теоретические понятия: Первообразная. Неопределённый интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной.

Геометрические и физические приложения неопределённого интеграла.

В основе интегрирования методом подстановки лежит формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'^{(t)}dt = F(\varphi(t)) + C, \text{где } x = \varphi(t)$$

Рассмотрим этот метод.

Алгоритм вычисления неопределенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной.

Результат полезно проверять дифференцированием.

Пример 1.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{x+1}.$$

Решение.

Сделаем замену переменных $x + 1 = t$ и найдем дифференциал от обеих частей, тогда

$$dt = d(x+1) \Rightarrow dt = (x+1)'dx \Rightarrow dt = dx.$$

Подставляя все в исходный интеграл, получим:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+1| + C,$$

Упражнения

Вычислить неопределенный интеграл методом замены переменной

1. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$;   2. $\int (4\sin^2 \cos x - \cos x)dx$

Задание на дом*:* Богомолов: §1-7, №33, 16-21 стр. 193-194

Вопросы для самопроверки

1. Неопределенный интеграл…
2. Таблица основных формул неопределенного интеграла
3. Алгоритм решения методом заменой переменной

Практическое занятие № 12.

Вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.

Цели занятия:

Образовательная: Закрепить умения, знания, навыки

Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности

Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

Основные теоретические понятия: Первообразная. Неопределённый интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Геометрические и физические приложения неопределённого интеграла.

Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование по частям.

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (1)$$

Формула (1) называется формулой интегрирования по частям.

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической и трансцендентной функции. В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv - оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

Пример 2: Найти интеграл, используя интегрирование по частям: $\int x \cdot \sin x dx$.

Решение: Положим $u = x, dv = \sin x dx$; тогда $du = dx, v = -\cos x$.

Отсюда $\int x \cdot \sin x dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$.

Пример 3: Найти интеграл, используя интегрирование по частям: $\int e^x \cdot \cos x dx$.

Решение: Положим $u = e^x, dv = \cos x dx$; тогда $du = e^x dx, v = \sin x$.

Отсюда $\int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx$.

К полученному в правой части равенства интегралу(отметим, что он, в сущности, не проще исходного) снова применим метод интегрирования по частям: $\int \sin x \cdot e^x dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx$.

Отсюда

$$\int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \sin x - (-e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx) = e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x \cdot \cos x dx.$$

В итоге снова получили исходный интеграл, и может показаться, что решение зашло в тупик. Однако, перенеся этот интеграл в левую часть равенства, получим $2\int e^x \cdot \cos x dx = e^x(\cos x + \sin x) + C$.

Теперь окончательно $\int e^x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$

Упражнения

Вычислить неопределенный интеграл методом замены переменной

1. $\int x\cos x dx$;
2. $\int (1-x)\sin x dx$;
3. $\int e^x \sin x dx$.
4. $\int xe^{-2x} dx$
5. $\int (x+1)\cos x dx$
6. $\int xe^x dx$
7. $\int (2x-5)e^x dx$
8. $\int xarctgxdx$

Задание на дом*:* Богомолов: §1-7, №33, 16-21 стр. 193-194

Вопросы для самопроверки

1. Неопределенный интеграл…
2. Таблица основных формул неопределенного интеграла
3. Алгоритм решения методом интегрирования по частям.

Практическое занятие № 13

Вычисление определенного интеграла.

Цели занятия*:*

Образовательная: Выработать навыки вычисление определенного интеграла

Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности

Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

Основные теоретические понятия: Первообразная. Определённый интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

Определение определённого интеграла, его свойства.

Формула Ньютона - Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

Пример 1: *Вычислить определенный интеграл* $\int_{-1}^{2}(2x - x^3)dx$

Решение: Воспользуемся свойствами определенных интегралов и формулой Ньютона – Лейбница для f(x) непрерывной на [a; b]:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где F(x) некоторая первообразная для функции f(x)

$$\int_{-1}^{2}(2x - x^3)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = (4-4) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

Пример 2: *(физические приложения неопределённого интеграла)*

Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{t}^2 - 2\boldsymbol{t}$. *Найти закон ее движения.*

Решение: Известно, что скорость прямолинейного движения точки равна производной от пути $\boldsymbol{S}$ по времени $\boldsymbol{t}$, т.е. $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}} = 3\boldsymbol{t}^2 - 2\boldsymbol{t}$, откуда $\boldsymbol{ds} = (3\boldsymbol{t}^2 - 2\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$. Интегрируя, находим

$$\int \boldsymbol{ds} = \int (3\boldsymbol{t}^2 - 2\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}; \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}^3 - \boldsymbol{t}^2 + \boldsymbol{C} \text{ -закон движения}$$

Пример 6: .Используя формулу Ньютона – Лейбница, вычислить интеграл: $\int_1^4 x^2 dx$

Решение: Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1;4]$ имеет первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда по формуле $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, имеем $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = 21$.

Упражнение Используя формулу Ньютона – Лейбница, вычислить интеграл:

1) $\int_0^2 (3x^2 - 1)dx$; 2) $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$.

3) $\int_0^1 x(1 - x^2)dx$;

Задание на дом*: Н.В. Богомолов: гл.11 §1-7, 71-73,80 стр. 188-204.*

Вопросы для самопроверки

1. Определение первообразной и определённого интеграла. Свойства определённого интеграла.
2. Его геометрический смысл и свойства.
3. Формула Ньютона- Лейбница.

Практическое занятие № 14.

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной и методом интегрирования по частям.

Цели занятия:

Образовательная: Закрепить умения, знания, навыки

Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности

Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

Основные теоретические понятия: Определённый интеграл, его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям.

Определение определённого интеграла, его свойства.

Формула Ньютона - Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной.

Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование по частям.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

Формула называется формулой интегрирования по частям.

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической и трансцендентной функции. В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv - оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

Пример 1: Вычислить определенный интеграл методом замены переменной: $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Решение:

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ при\, x = 1, t = 0 \\ при\, x = e, t = 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2: Найти значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\frac{\pi}{6} - x)dx$.

Решение:

Для нахождения первообразной (и использования формулы Ньютона - Лейбница) применим формулу понижения степени

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\frac{\pi}{6} - x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi}{3} - 2x))dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)dx = \left.\frac{1}{2}x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}(\sin(-\frac{2}{3}\pi) - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}(\pi + \frac{\sqrt{3}+1}{2}).$$

Пример 3: Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}dx$.

Решение: Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u = x, dv = e^{-x}dx,$ откуда $du = dx, v = -e^{-x}$.

Тогда получим $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \dfrac{e-2}{e}$.

Упражнение Используя формулу Ньютона – Лейбница, вычислить интеграл:

1. $\int\limits_0^2 \dfrac{4x dx}{\sqrt{1+2x^2}}$; 2. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$; 3. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \dfrac{3dx}{2\cos^2(x/2)}$ 4. $\int\limits_1^2 \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

5. $\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x} dx$ 6. $\int\limits_1^2 x(2-x^2)^5 dx$ 7. $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{(3x^2-1)^4} dx$ 8. $\int\limits_3^8 \dfrac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

9. $\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx$ 10. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x\sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) dx$ 11. $\int\limits_0^2 \ln(x^2+4) dx$ 12. $\int\limits_1^e (x+1)\ln x dx$

Задание на дом: *Н.В. Богомолов: гл.12 §1-3, 20-29,31,32 стр. 205-210.*

Вопросы для самопроверки

1. Определение первообразной и определённого интеграла. Свойства определённого интеграла.
2. Алгоритм интегрирования заменой переменной и по частям
3. Формула Ньютона- Лейбница.

Практическое занятие №15.

Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.

Цели занятия:

Образовательная: Закрепить умения, знания, навыки

Воспитательная: Формирование нравственных качеств, ответственности

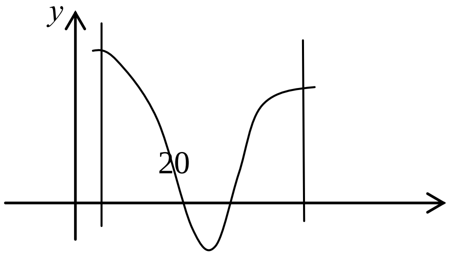
Развивающая: Развитие творческого и технического мышления

Обеспечение занятия: доска, ручка, бумага, учебник

<u>**Основные теоретические понятия:**</u> Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x) dx$$

Если график расположен ниже оси *Ox*, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “–“, если график расположен выше оси *Ox*, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.



+ +
0 a – b x

Таким образом, для нахождения суммарной площади используется формула

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

а) Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

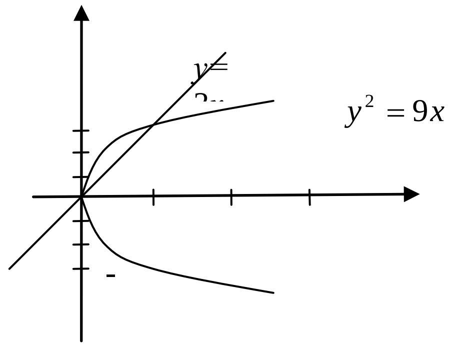
$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$$

б) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a, b]$, выражается формулой $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$.

Пример 1: Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y^2 = 9x \text{ и } y = 3x.$$

Построив графики данных функций, получим фигуру, ограниченную сверху кривой $y^2 = 9x$ и снизу прямой $y = 3x$.



Решение:

Найдем точки пересечения кривых $y^2 = 9x$ и $y = 3x$:

$$\begin{cases} y^2 = 9x, \\ y = 3x; \end{cases} \begin{cases} (3x)^2 = 9x, \\ y = 3x; \end{cases} \begin{cases} 9x^2 - 9x = 0, \\ y = 3x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x(x-1) = 0, \\ y = 3x; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ y = 3x; \end{cases} \begin{cases} x = 0,\ y = 0, \\ x = 1,\ y = 3. \end{cases}$$

Следовательно, $A(0;0)$ и $B(1;3)$ – искомые точки.

Тогда пределы интегрирования есть a=0 и b=1.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_0^1 (3\sqrt{x} - 3x)dx = 3\int_0^1 x^{1/2}dx - 3\int_0^1 xdx = 3\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 - 3\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2: Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью Ox.

Решение:

Парабола пересекает ось Ox в точках $O(0;0)$ и $M(4;0)$. Следовательно,

$$S_{фиг.} = \int_0^4 (4x - x^2)dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3})\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}(кв.ед)$$

Пример 3:. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5x - 6$.

Решение:

Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y = x^2 - 6 \\ y = -x^2 + 5x - 6 \end{cases}$. Отсюда находим $x_1 = 0, x_2 = 2{,}5$. Искомую площадь находим по формуле: $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

$$S = \int\limits_0^{2,5} (-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6)dx = \int\limits_0^{2,5} (-2x^2 + 5x)dx = 5\frac{5}{24}(\textit{кв.ед.})$$

6.Найти площадь фигуры, заключенный между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в т. (3;5) и осью Oy.

7.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$.

8.Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

1) графиком функции $y = (x-1)^2$, осью Оx и прямой x=2;

2) графиком функции $y = 2x - x^2$ и осью Оx;

3) графиком функции $y = \frac{2}{x}$, осью Оx и прямыми x=1;x=4;

4) графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью Оx и прямой x=4.

9.Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми x=1,x=8, $y = \sqrt[3]{x}$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми x=2, $y = 5x - x^2$, $2 \le x \le 5$.

11. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 8x - 2x^2$, касательной к этой параболе в ее вершине и прямой x=0.

12.. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y^2 = 9x,\ y = 3x$; 2) $y = x^3,\ \ y = 1,\ \ x = 0$;

3) $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$; 4) $y = 2^x,\ \ y = 2x - x^2,\ \ x = 0,\ \ x = 0$;

5) $y = \frac{1}{1+x^2},\ y = \frac{x^2}{2}$; 6) $x^2 = 4y,\ \ y = \frac{8}{x^2+4}$.

Задание на дом: *Н.В. Богомолов: гл.11 §1-7, №24-26, 49-50,71-73,80 стр. 188-204. гл.12 §1- 4, №15,16,28,29,31,32 стр. 205-211.*

Вопросы для самопроверки

1. Формула Ньютона- Лейбница.
2. Вычисление площадей, длин дуг, объёмов с помощью определённого интеграла.
3. Площадь криволинейной трапецией вычисляется по формуле…

Список использованной литературы

Основные источники:

1. Дискретная математика. Задачи и упражнения с решениями: Учебно-методическое пособие / А.А. Вороненко, В.С. Федорова. - М.: НИЦ ИНФРА- М, 2014.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие / Н. В. Богомолов. - 10-е изд. - М.: Высш. шк., 2018.
3. Григорьев С. Г. Математика : Учебник для СПО / С. Г.Григорьев, С. В.Иволгина; Под ред. проф. В. А. Гусева. - 5-е изд., стер.- М. : Академия,2015.
4. Дадаян А. А. Сборник задач по математике : Учеб. пособ. для СПО / А. А. Дадаян. - М. : ФОРУМ: ИНФРА-М, 2019.
5. Макарычев Ю. Н. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей : Учеб. пособ. для учащихся 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев; Под ред. С.А. Теляковского. - М.: Просвещение, 2020.

Дополнительные источники:

1. Максимова О. В. Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособ. для СПО / О. В. Максимова, А. М. Махоткина. - Ростов н/Д : Феникс, 2015.
2. Шипова JI.И. Математика : учеб. пособие для сред. проф. образования, обучающихся по специальностям 270802, 270101,70837, 270809, 250109, 240111 / Л.И. Шипова. А. Е. Широв. - Волгоград : Ин-Фолио, 2012.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В двух частях./ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко.-7-е изд., испр. [Текст] - М. : Оникс, 2016.