ПРОЕКТ

Сефибеков Сефибек Рамазанович

О ВНЕДРЕНИИ НОВОГО МЕТОДА В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

(современные образовательные технологии – элективный курс)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Книга – книгой,
а мозгами двигай.
В. Маяковский

Важнейшая задача учителя математики - научить учащихся не просто мыслить, а мыслить творчески, чтобы они своими усилиями кроме шаблонных решений, приводимых в школьных учебниках к математическим объектам, постарались найти и простые не шаблонные решения.

С. Р. Сефибеков

Актуальность научной работы. Последовательности **m-го** порядка являются одним из видов конечных разностей, изучаемых на математических отделениях университетов.

Рассматривая их, мы внедряем в школьный курс математики новый метод для решения широкого круга задач. В дальнейшем этот метод будем именовать «Методом последовательности» (сокращено **«МП»**).

Предположим, что мы имеем ряд математических задач, ответы которых записываются многочленами. Для решения таких задач мы и приводим здесь (простой) метод, основанный на «*последовательностях m-го порядка*». Такие последовательности мы рассматриваем впервые. Решения задач МП сводятся к системам линейных уравнений, которые решаются методом Гаусса (*методом последовательного исключения неизвестных*) или *методом определителей* (применяя теорему Крамера).

Мы ставим перед собой следующие

Цели:

1. *Ввести понятие «последовательности m-го порядка»;*
2. *Дать метод – «метод последовательности», основанный на нем;*
3. *Способствовать выработке навыков решения задач этим методом.*

Основная часть

§1. Последовательности m-го порядка

Наше изложение – простое. Оно состоит из двух определений и двух теорем (причем вторая теорема является обобщением первой).

В начальном (школьном) курсе математики рассматривается арифметическая прогрессия, являющаяся числовой последовательностью, общий член которой представляется многочленом первой степени. Рассмотрим примеры других последовательностей.

О п р е д е л е н и е 1. *Последовательностью **m-го** порядка называется числовая последовательность, зависимость общего члена которой от своего номера **n** выражается многочленом степени **m**.*

Например, последовательность (a_n), заданная общим членом a_n=5, есть последовательность нулевого порядка ($5 = 5n^0, m = 0$); заданная общим членом a_n= $5n$ – последовательность первого порядка ($m = 1$) или арифметическая прогрессия; заданная общим членом $a_n = 5n^2 + 2n$ – последовательность второго порядка ($m = 2$).

Пусть дана последовательность(a_n):

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots \quad (1)$$

Составим разности:

$$a_2 - a_1 = d_1, a_3 - a_2 = d_2, \ldots, a_{n+1} - a_n = d_n, a_{n+2} - a_{n+1} = d_{n+1}, \ldots \quad (2)$$

$$d_2 - d_1 = p_1, d_3 - d_2 = p_2, \ldots, d_{n+1} - d_n = p_n, d_{n+2} - d_{n+1} = p_{n+1}, \ldots \quad (3)$$

$$p_2 - p_1 = q_1, p_3 - p_2 = q_2, \ldots, p_{n+1} - p_n = q_n, p_{n+2} - p_{n+1} = q_{n+1}, \ldots \quad (4)$$

и т.д.

О п р е д е л е н и е 2. *Числа $d_1, d_2, d_3, \ldots$ называются первыми разностями последовательности* **(1)**; *эти числа образуют новую последовательность. Разности $p_1, p_2, p_3, \ldots$ этой новой последовательности называются вторыми разностями последовательности (1) (они образуют новую последовательность); разности вторых разностей $q_1, q_2, q_3, \ldots$ называются третьими разностями последовательности (1) (они образуют новую последовательность) и т.д.*

Для удобства последовательность **(1)** и ее разности **(2), (3), (4),…** расположим в виде таблицы следующим образом

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,a_n\ ,a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots$$
$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots,d_n\ ,d_{n+1},\ d_{n+2},\ \ldots$$
$$P_1,\ P_2,\ \ldots\ ,\ P_n\ ,P_{n+1},\ \ldots$$
$$q_1,\ \ldots,\ q_n\ ,\ \ldots$$
. . . .

ПРИМЕР. Составим таблицу первых, вторых разностей для последовательности (a_n) с общим членом a_n=$n^2 + 1$.

Имеем: **2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, …**

3, 5, 7, 9, 11, 13, …

2, 2, 2, 2, 2, …

В данном **ПРИМЕРЕ** мы имеем последовательность **2-го** порядка. Как видно из таблицы, первые разности составляют арифметическую прогрессию – последовательность **1-го** порядка, а вторые разности – последовательность **0-го** порядка.

Таким образом, по рассмотренному **ПРИМЕРУ** можно выдвинуть следующую **ГИПОТЕЗУ:** *«Последовательность первых разностей последовательности **2-го** порядка является последовательностью **1-го** порядка, а последовательность вторых разностей – последовательностью **0-го** порядка».*

Докажем истинность этой **ГИПОТЕЗЫ.**

Общий член последовательности (x_n) **2-го** порядка имеет вид:

$$x_n = an^2 + bn + c.$$

Тогда общий член последовательности (d_n) первых разностей будет

$$d_n = x_{n+1} - x_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - an^2 - bn - c = 2an + a + b.$$

Значит, последовательность (d_n) является последовательностью **1-го** порядка.

Общий член последовательности (p_n) вторых разностей будет:

$$p_n = d_{n+1} - d_n = 2a(n+1) + a + b - 2an - a - b = 2a.$$

Значит, последовательность (p_n) является последовательностью **0-го** порядка.

Имеет место утверждение, обратное данной **ГИПОТЕЗЕ:** *«Если вторые разности последовательности (x_n) образуют последовательность **0-го** порядка, то первые разности образуют последовательность **1-го** порядка и сама последовательность (x_n) является последовательностью **2-го** порядка».*

Это обратное утверждение докажем методом от противного. Пусть последовательность (d_n) первых разностей последовательности (x_n) есть последовательность первого порядка, а последовательность (p_n) вторых разностей – последовательность ***0-го*** порядка, и сама последовательность (x_n) –последовательность **m-го** порядка, где $m \neq 2$. Тогда равенство

$d_n = x_{n+1} - x_n$ противоречиво: справа этого равенства многочлен **(m-1)-го** порядка и **m-1**$\neq 1$, так как по предположению $m \neq 2$.

Таким образом, сказанное выше можно резюмировать в виде следующей теоремы.

Т Е О Р Е М А 1. *Для того, чтобы последовательность была последовательностью **2-го** порядка, необходимо и достаточно, чтобы ее первые разности образовали последовательность **1-го** порядка, вторые разности образовали последовательность **0-го** порядка.*

Обобщением **Т Е О Р Е М Ы 1** является следующая теорема.

Т Е О Р Е М А 2. *Для того чтобы последовательность была последовательностью **m-го** порядка, необходимо и достаточно, чтобы **1-е,2-е,3-е** и т.д. ее разности являлись соответственно разностями **(m-1)-го, (m-2)-го, (m-3)-го** и т.д. порядков.*

Доказательство.

Н е о б х о д и м о с т ь. Воспользуемся методом математической индукции. Для **m=2** необходимость доказана выше. Допустим, что для последовательности (x_n) порядка **m=k**, где **k>2**

1-е,2-е,3-е,… , (k-1)-е, k-е разности являются соответственно разностями **(k-1)-го, (k-2)-го, (k-3)-го,…, 1-го, 0-го** порядков. Тогда для последовательности $(x_n^{/})$ **m=(k+1)-го** порядка последовательность $(d_n^{/})$ первых разностей, где $d_n^{/} = x_{n+1}^{/} - x_n^{/}$, есть последовательность(x_n) **k-го** порядка. Учитывая по нашему допущению разности последовательности (x_n) **k-го** порядка, заключаем, что *1-е,2-е,3-е,… , k-е, (k+1)-е* разности последовательности $(x_n^{/})$ **m=(k+1)-го** порядка являются соответственно разностями **k-го, (k-1)-го,…, 1-го, 0-го** порядков. Условия математической индукции выполнены. Поэтому необходимость следует для любого **m=k**.

Достаточность. Для **m=2** достаточность доказана (см. **ТЕОРЕМУ1**). Пусть имеем последовательность (x_n), *1-е,2-е,3-е,… , (k-1)е, k-е* разности которой соответственно являются разностями **(k-1)-го, (k-2)-го,…, 1-го, 0-го** порядков **(k>2).** Тогда последовательность (x_n) является последовательностью **m=k-го** порядка. Докажем это методом от противного. Пусть последовательность (x_n) является последовательностью m-го порядка, где $m \neq k$. Тогда для общего члена d_n последовательности (d_n) первых разностей последовательности (x_n) имеем равенство: $d_n = x_{n+1} - x_n$. Но это равенство неверно, поскольку его правая часть – многочлен **(m-1)-го** порядка и **m-1≠ k-1** (ведь **m≠k**!).

§2. Метод последовательности (МП), задачи

Опираясь на **Т Е О Р Е М У 2**, дадим **МП**. Этот метод состоит в следующем:

1. *Составление таблицы результатов наблюдений;*
2. *Составление таблицы разности последовательности;*
3. *Определение коэффициентов искомого многочлена и, наконец,*
4. *Запись ответа поставленной задачи.*

Рассмотрим следующие задачи:

*1. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью **d**. Составить формулу **n-го** члена a_n этой прогрессии.*

*2. Существует ли функция **f(x)**, для которой **f(1)=0, f(2)=1, f(3)=6, f(4)=15, f(5)=28?***

*3. Доказать, что сумма $(\sum_n)$ углов любого **n**-угольника равна **180^0•(n-2).***

*4. На плоскости даны **n** точек и построены множество отрезков с концами в этих точках. Подсчитать число всех отрезков.*

*5. Сколько диагоналей у **n**-угольника?*

*6. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость **Oxy** графики **n** квадратных трехчленов вида $y = ax^2 + bx + c$ **(n=1;2;3;…)?** (Эта задача принадлежит Н. Б. Васильеву; см. **М.1231, [4], с. 30**).*

7. На какое максимальное число частей делят:

*а) плоскость **n** прямых?*

*б) пространство **n** плоскостей?*

*8. Сколько диагоналей у **n**-угольной призмы?*

9. Для произвольного натурального числа n найти число целых решений неравенства:

а) $|x| + |y| \leq n$,

б) $|x| + |y| + |z| \leq n$

10. Доказать, что значение суммы $S_n = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$, *где* $k \epsilon N$, *есть многочлен* ***(k+1)-й*** *степени.*

11. Вычислить сумму: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$

12. Вычислить сумму: $S_n = 1 \bullet 2 + 2 \bullet 3 + 3 \bullet 4 + \cdots + n(n+1)$

Р Е Ш Е Н И Я

1. 1. Составим таблицу:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
a_n	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	…

2.Составим таблицу разностей:

a_1 , a_1+d , a_1+2d , a_1+3d , … **(1)**

d, d, d,… **(2)**

Числа в строке **(2)** составляют последовательность **0-го** порядка. Отсюда последовательность **(1)** (данная последовательность) есть последовательность **1-го** порядка. Выразим ее виде многочлена первой степени:

$$a_n = bn + q \qquad (3)$$

*3.*Полагая в равенстве **(3)** **n=1;2** и, имея ввиду таблицу значений, получим систему:
$$\begin{cases} b + q = a_1, \\ 2b + q = a_1 + d \end{cases}$$

Решение этой системы: **b=d, q=**$a_1 - d$**.**

4.По равенству **(3):** $a_n = dn + (a_1 - d)$, откуда:

$a_n = a_1 + d(n-1)$.

Ответ: $a_1 + d(n-1)$.

2. Для школы эта задача – головоломка: никакими методами школьной математики решить ее нельзя! А вот **МП** нам и поможет.

1.Определим разности последовательности **(f(x))** значений функции **f(x),** где **x=1;2;3;4;5;…** . Имеем:

0, 1, 6, 15, 28, … **(1)**

1, 5, 9, 13, … **(2)**

Числа в строке **(2)** составляют последовательность **1-го** порядка – арифметическая прогрессия с разностью **4**. Отсюда данная последовательность **(f(x))** – последовательность **(1)** есть последовательность **2-го** порядка. Выразим ее в виде многочлена второй степени:

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad (3)$$

2.Полагая в равенстве **(3)** **x=1;2;3,** получим систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+b+c=0} \\ \boldsymbol{4a+2b+c=1} \\ \boldsymbol{9a+3b+c=6}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: *a=2, b=-5, c=3.*

3.По равенству **(3)** $f(x)=2x^2-5+3.$

Ответ: $2x^2-5+3.$

3. 1. Известно, что для треугольника $\sum_3 = \mathbf{180^0}$. Взяв четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и, разбивая их на неперекрываемые друг друга треугольники, проведением диагоналей от одной вершины, можно получить:

$$\sum_4 = \mathbf{360^0}, \qquad \sum_5 = \mathbf{540^0}, \qquad \sum_6 = \mathbf{720^0}.$$

Определим разности этой последовательности ($\sum_n$):

$$\mathbf{180^0}, \quad \mathbf{360^0}, \quad \mathbf{540^0}, \quad \mathbf{720^0},\ldots \qquad (1)$$

$$\mathbf{180^0}, \quad \mathbf{180^0}, \quad \mathbf{180^0}, \ldots \qquad (2)$$

Числа в строке **(2)** составляют последовательность **0-го** порядка. Отсюда последовательность **(1)** есть последовательность первого порядка. Выразим ее в виде многочлена первой степени:

$$\sum_n = \boldsymbol{an+b}. \qquad (3)$$

2.Полагая в равенстве **(3)** **n=3; 4,** получим систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3a+b=180^0}, \\ \boldsymbol{4a+b=360^0}, \end{cases}$$

откуда $\boldsymbol{a}=\mathbf{180^0}$, $\boldsymbol{b}=\mathbf{-360^0}$.

3.По равенству **(3)** $\sum_n = \mathbf{180^0}\boldsymbol{n} - \mathbf{360^0}$, т. е.

$\sum_n = 180^0(n-2)$.

Ответ: $180^0(n-2)$.

4. 1. Обозначив число отрезков через y_n, и, проведя наблюдения, составим таблицу:

n	2	3	4	5	…
y_n	1	3	6	10	…

2.Определим разности последовательности (y_n):

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \dots \qquad (1)$$

$$2, \quad 3, \quad 4, \dots \qquad (2)$$

Числа в строке **(2)** составляют последовательность **1-го** порядка (арифметическая прогрессия с разностью **1**). Отсюда строка **(1)** – данная последовательность есть последовательность **2-го** порядка. Общий член этой последовательности выражается многочленом второй степени:

$$y_n = an^2 + bn + c \qquad (3)$$

3.Для определения коэффициентов a, b и c (в равенстве **(3)**) положим **n=2; 3; 4**. Тогда, имея ввиду значения y_2, y_3, y_4 в таблице, получим систему трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 1, \\ 9a + 3b + c = 3, \\ 16a + 4b + c = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=0$.

4.По равенству **(3)**: $y_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Ответ: $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

5. Здесь не важно, выпуклый **n**-угольник, или невыпуклый. Предлагаем читателю решить эту задачу **МП**. Мы дадим решение, используя результат *Задачи* ***4***.

Всего отрезков, соединяющих вершины **n**-угольника: $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$. Вычтя из этого числа число **n** – число сторон **n** – угольника, получим искомое число диагоналей: $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$, где $n \geq 3$ (для треугольника (при **n=3**) число диагоналей равно **0**).

Ответ: $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$, $n \geq 3$

6. 1. Проведя анализ, заметим, что наибольшее число частей получится, когда все графики попарно пересекаются в двух точках. Обозначим искомое число частей через y_n. Составим таблицу:

n	1	2	3	4	…
y_n	2	5	10	17	…

2.Определим разности последовательности **(y_n):**

2, 5, 10, 17, … (1)

3, 5, 7, … (2)

Числа в строке **(2)** составляют последовательность **1-го** порядка (арифметическая прогрессия с разностью **2**). Отсюда строка **(1)** – данная последовательность есть последовательность **2-го** порядка. Общий член этой последовательности выражается многочленом второй степени:

$$\boldsymbol{y_n = an^2 + bn + c} \qquad (3)$$

3.Полагая в равенстве **(3) n=2; 3; 4** и, имея ввиду таблицу значений, получим систему:

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ 4a + 2b + c = 5, \\ 9a + 3b + c = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: ***a*=1, *b*=0, *c*=*1*.**

4.По равенству **(3):** $\boldsymbol{y_n = n^2 + 1}$**.**

Ответ: $\boldsymbol{n^2 + 1}$ частей.

7. *а):*

1. Проведя анализ, установим, что число частей будет максимальным, если никакие две из этих прямых не параллельны и никакие три не имеют общей точки. Обозначим искомое число частей через y_n и составим таблицу:

n	1	2	3	4	…
y_n	2	4	7	11	…

2.Определим разности последовательности **(y_n):**

2, 4, 7, 11, … **(1)**

2, 3, 4, … **(2)**

Числа в строке **(2)** составляют последовательность **1-го** порядка (арифметическая прогрессия с разностью **1**). Отсюда строка **(1)** – данная последовательность есть последовательность **2-го** порядка. Общий член этой последовательности выражается многочленом второй степени:

$$\boldsymbol{y_n = an^2 + bn + c} \qquad \textbf{(3)}$$

3.Полагая в равенстве **(3)** **n=1; 2; 3** и, имея ввиду таблицу значений, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a + b + c = 2}, \\ \boldsymbol{4a + 2b + c = 4}, \\ \boldsymbol{9a + 3b + c = 7}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$.

4.По равенству **(3)**: $\boldsymbol{y_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1}$.

Ответ: $\boldsymbol{\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1}$ частей.

б):

1. Проведя анализ, установим, что число частей будет максимальным, если никакие две плоскости не будут параллельными и никакие три плоскости не будут пересекаться. Обозначим искомое число частей через $\boldsymbol{y_n}$ и составим таблицу:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
$\boldsymbol{y_n}$	**2**	**4**	**8**	**15**	**…**

В таблице приведены четыре значения последовательности $(\boldsymbol{y_n})$. Это мало для нужного вывода. Найти значения $\boldsymbol{y_n}$ при **n=5; 6;…** уже трудно! Как быть? Чтобы выйти из этого положения, прибегнем здесь к маленькой хитрости. Найдем число частей при **n=0**. Очевидно, что нуль плоскостей оставляют пространство неразделенным, т. е. $\boldsymbol{y_0=1}$.

2.Определим разности последовательности $(\boldsymbol{y_n})$ (учитывая табличные значения и $\boldsymbol{y_0=1}$):

1, 2, 4, 8, 15,… **(1)**

1, 2, 4, 7,… **(2)**

1, 2, 3, … **(3)**

Числа в строке **(3)** составляют последовательность **1-го** порядка (арифметическая прогрессия с разностью **1**). Отсюда строка **(2)** – последовательность **2-го** порядка, а строка **(1)** – данная последовательность, есть последовательность **3-го** порядка. Таким образом, общий член последовательности (y_n) можно выразить многочленом третьей степени:

$$y_n = an^3 + bn^2 + cn + d \qquad (4)$$

3.Полагая в равенстве **(4)** **n=1; 2; 3** и, учитывая, что y_0**=1** при **n=0**, а также таблицу значений, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} d = 1, \\ a + b + c = 1, \\ 8a + 4b + 2c = 3, \\ 27a + 9b + 3c = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: $a=\frac{1}{6}$, $b=0$, $c=\frac{5}{6}$, $d=1$.

4.По равенству **(4)**: $y_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1.$

Ответ: $\frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$ частей.

8. 1. Обозначим число диагоналей через $\sum_n$. Заметим, что

$\sum_3 = 0$, $\sum_4 = 4$, $\sum_5 = 10$, $\sum_6 = 18$, ... Составим разности этой последовательности $(\sum_n)$:

$$0, \quad 4, \quad 10, \quad 18, \ldots \qquad (1)$$

$$4, \quad 6, \quad 8, \ldots \qquad (2)$$

Строка **(2)** – последовательность **1-го** порядка (арифметическая прогрессия с разностью **2**). Отсюда строка **(1)** – данная последовательность, есть последовательность **2-го** порядка. Выразим ее виде многочлена второй степени:

$$\sum_n = an^2 + bn + c \qquad (3)$$

2.Полагая в равенстве **(3)** **n=3; 4; 5**, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 0, \\ 16a + 4b + c = 4, \\ 25a + 5b + c = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: ***a*=1, *b*=–3, *c*=*0*.**

3.По равенству **(3)**: $\sum_n = n^2 - 3n.$

Ответ: $n^2 - 3n.$

9. *а).* Плоскость можно покрыть сетью равных квадратов. Узлы этой сети (вершины квадратов) в математике называют *ц е л о ч и с л е н н о й р е ш е т к о й.* Примером такой решетки служит лист клетчатой бумаги из школьной тетради. Будем называть сторону квадрата решетки *р а з м е р н о с т ь ю р е ш е т к и.*

Выберем систему прямоугольных координат **Oxy**, взяв начало координат – точку **O** в узле, направив координатные оси вдоль линий решетки и приняв за единичный отрезок на координатных осях размерность решетки. Нетрудно заметить, что «*г р а ф и к о м*» нашего неравенства в этой системе является квадрат с вершинами в узлах решетки. Тогда число целых решений неравенства равно числу узлов, расположенных в квадрате (внутри его и на границе).

1.Обозначим таких узлов через y_n и подсчитаем их при **n=1; 2; 3; 4 (рис. 1 *а, б,в,г*).**

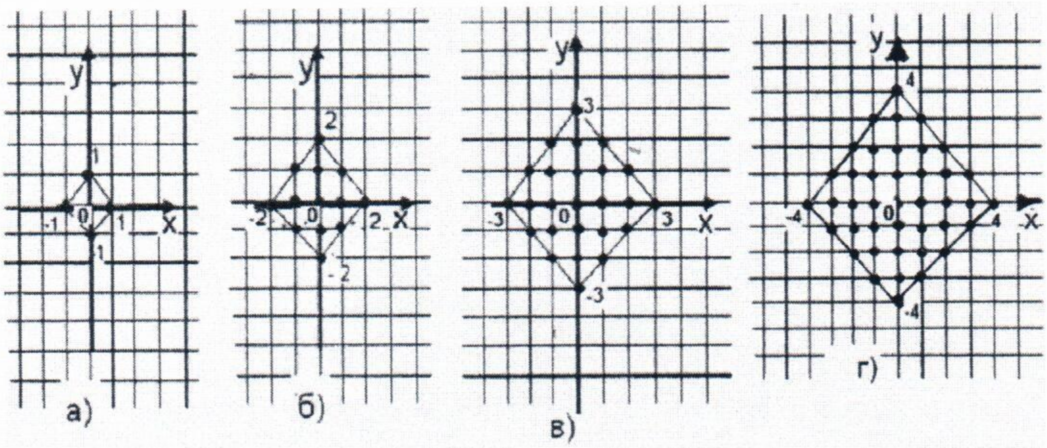


Рис. 1.

Составим таблицу:

n	1	2	3	4	…
y_n	5	13	25	41	…

Определим разности последовательности (y_n):

5, 13, 25, 41, … **(1)**

8, 12, 16, … **(2)**

Числа в строке **(2)** составляют последовательность **1-го** порядка (арифметическая прогрессия с разностью **4**). Отсюда строка **(1)** – данная последовательность есть последовательность **2-го** порядка. Общий член этой последовательности выражается многочленом второй степени:

$$y_n = an^2 + bn + c \qquad (3)$$

3.Полагая в равенстве **(3)** **n=1; 2; 3** и, имея ввиду таблицу значений, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c = 5, \\ 4a + 2b + c = 13, \\ 9a + 3b + c = 25. \end{cases}$$

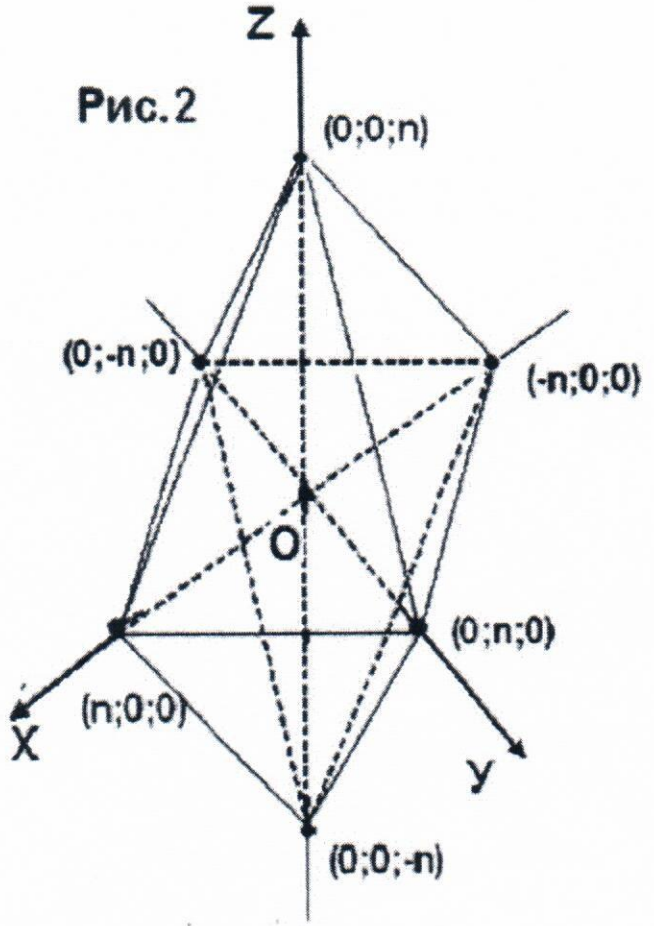
Р е ш е н и е этой системы: ***a*=2, *b*=2, *c*=*1***

4.По равенству **(3)**: $y_n = 2n^2 + 2n + 1.$

Ответ: $2n^2 + 2n + 1$ решений.

б). Пространство можно покрыть сетью равных кубов. Узлы этой сети (вершины кубов) также называют *ц е л о ч и с л е н н о й р е ш е т к о й* (по аналогии с плоскостью). Будем называть ребро куба решетки *р а з м е р н о с т ь ю р е ш е т к и.* Выберем систему прямоугольных координат **Oxyz**, взяв начало координат – точку **O** в узле, направив координатные оси вдоль линий решетки и приняв за единичный отрезок на координатных осях размерность решетки. Нетрудно заметить, что «*г р а ф и к о м*» нашего неравенства в этой системе является правильный восьмигранник – октаэдр с вершинами в узлах решетки. Тогда число целых решений неравенства равно числу узлов, расположенных в октаэдре (внутри его и на границе).

1.На **рис. 2** приводим изображение октаэдра (изображение самой решетки не приводим). Проведя плоскости **z=0, z=±1, z=±2, z=±3,** …, **z=±(n-1), z=±n,** получим сечения октаэдра – квадраты и две точки: **(0;0;n), (0;0;−n)**. Обозначим число таких узлов через y_n и подсчитаем их при **n=1; 2; 3; 4;…** .



Если **n=1**, то имеем квадрат как на рис. **1*a*** и точки **(0; 0; 1), (0; 0; −1).** Тогда (см. решение ***a)***): $у_1 = (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1) + 2 = 7$.

Если **n=2**, то имеем квадрат как на **рис. 1б**, два квадрата как на **рис. 1*a*** и точки **(0; 0; 2), (0; 0; −2).**

Поэтому $у_2 = (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1) + 2) + 2 \cdot (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1)$**+2=25.**

Если **n=3,** то имеем квадрат как на **рис. 1в**, два квадрата как на **рис. 1б** и два квадрата как на **рис.1*a*** и точки **(0; 0; 3), (0;0; −3).** Тогда

$$У_3 = (2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1) + 2 \cdot (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1) +$$
$$+2 \cdot (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1)+2=63.$$

Если **n=4**, то имеем квадрат как на **рис. 1г**, два квадрата как на **рис. 1в**, два квадрата как на **рис. 1б**, два квадрата как на **рис. 1а** и точки **(0; 0; 4), (0; 0; −4)**. Здесь $У_4 = (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1) + 2 \cdot (2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + +1) + 2 \cdot (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1) + 2 \cdot (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1)$**+2=129** и т. д.

Для сокращения работы прибегнем здесь к маленькой хитрости. Найдем число узлов при **n=0**. В этом случае октаэдр вырождается в точку **O** – в начало координат, тогда имеем **1** узел, т. е. $\mathbf{y_0=1}$. Внесем полученные нами подсчеты в таблицу:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
y_n	**1**	**7**	**25**	**63**	**129**	**…**

2.Определим разности последовательности (y_n):

1, 7, 25, 63, 129,… **(1)**

6, 18, 38, 66,… **(2)**

12, 20, 28, … **(3)**

Числа в строке **(3)** составляют последовательность **1-го** порядка (арифметическая прогрессия с разностью **8**). Отсюда строка **(2)** есть последовательность **2-го** порядка, а строка **(1)** – данная последовательность, есть последовательность **3-го** порядка. Таким образом, общий член последовательности (y_n) можно выразить многочленом третьей степени:

$$y_n = an^3 + bn^2 + cn + d \qquad (4)$$

3.Полагая в равенстве **(4)** **n=0; 1; 2; 3** (так как у нас четыре неизвестных *a*, **b**, **c** и **d**)и, имея ввиду таблицу значений, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} d = 1, \\ a + b + c + d = 7, \\ 8a + 4b + 2c + d = 25, \\ 27a + 9b + 3c + d = 63. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: $a=\frac{4}{3}$, $b=2$, $c=\frac{8}{3}$, $d=1$.

4.По равенству **(4)**: $y_n = \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{8}{3}n + 1.$

Ответ: $\frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{8}{3}n + 1$ решений.

10. Рассмотрим первые разности последовательности **(S_n)**, заданной формулой **S_n**. Общий член последовательности этих первых разностей $d_n = S_{n+1} - S_n = (1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k + (n+1)^k) -$
$-(1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k) = (n+1)^k$ – многочлен **k-ой** степени.

Следовательно, общий член последовательности **(S_n)**, задаваемой формулой **S_n**, есть многочлен **(k+1)−й** степени:

$$S_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \cdots + a_{k+1} n^{k+1}.$$

11. По *З а д а ч е 10* имеем равенство:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$$

Полагая по этому равенству **n=0; 1; 2; 3**, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 5, \\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 14. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: $a_0 = 0$, $a_1=\frac{1}{6}$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{3}$.

Следовательно, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$.

Ответ: $\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$.

12. *Первое решение:* Воспользуемся результатом *Задачи 11.* Имеем:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \left(\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right) = \frac{2}{3}n + n^2 + \frac{1}{3}n^3.$$

Второе решение: Воспользуемся **МП**

1.Проведя вычисления, составим таблицу:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**
S_n	**0**	**2**	**8**	**20**	**40**	**70**	**…**

2.Определим разности последовательности (s_n):

0, 2, 8, 20, 40, 70, … **(1)**

2, 6, 12, 20, 30, … **(2)**

4, 6, 8, 10, … **(3)**

Числа в строке **(3)** составляют последовательность **1-го** порядка (арифметическая прогрессия с разностью **2**). Отсюда строка **(2)** есть последовательность **2-го** порядка, а строка **(1)** – данная последовательность (S_n) есть последовательность **3-го** порядка. Выразим ее в виде многочлена третей степени:

$$S_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 \qquad (4)$$

3.Полагая по равенству **(4)** **n=0; 1; 2; 3,** и, имея ввиду таблицу значений, получим систему:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 2, \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 8, \\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 20. \end{cases}$$

Р е ш е н и е этой системы: $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$.

4.По равенству **(4)**: $S_n = \frac{2}{3}n + n^2 + \frac{1}{3}n^3$.

Ответ: $\frac{2}{3}n + n^2 + \frac{1}{3}n^3$.

Выводы

Все изложенное в данном **ПРОЕКТЕ** с успехом было рассмотрено на «*Элективном курсе*» по математике с учащимися IX−XI классов в средней общеобразовательной школе.

Несколько слов о самой науке математике. Математика – развивающаяся наука. На протяжении веков были разработаны новые понятия и методы. При прохождении начал математики в школе учащиеся знакомятся с некоторыми из них. Создание нового метода – этот вопрос не из простых! Современные образовательные технологии требуют создания нового оригинального, простого и доступного учащимся! Именно таким и является предлагаемый здесь «*Новый метод в математических объектах*». Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки. Недостатком «*Нового метода*» является то, что иногда возможно получение систем линейных уравнений с большим числом неизвестных (решение таких систем занимают много времени!). И все-таки, вводимый метод заслуживает внимания! Поэтому этот метод полезен всем, кто имеет дело с наукой математикой (учащимся, учителям, студентам, аспирантам, преподавателям ВУЗ-ов и научным работникам).

Возможно, мы снова сможем испытать тот же восторг и трепет, как и при первых встречах со школьной математикой. Но здесь все проще!

Заключение

Подведем итоги. Мы рассмотрели научно – теоретический и методический материал, где речь идет о «*Методе последовательности*», который является универсальным методом решения широкого круга математических задач, основанных на *последовательностях* ***m-го*** *порядка*. Хотя приведенные задачи можно решить и другими методами, приведенный новый метод (**МП**) изящен и прост по сравнению с существующими методами (например, *метод математической индукции*). С другой стороны, когда существующие методы не действуют (например, смотреть решение *Задачи 2*), наш новый метод «*работает*». В этом и заключается актуальность, научная новизна, значимость и распространение нового **МП**, относя его к современным образовательным технологиям!

Список литературы

1. С е ф и б е к о в С. Р. Последовательности **m-ГО** порядка // Ж. «Математика. ВСЕ для учителя!». – 2013, №7. –С. 22 – 29
2. С е ф и б е к о в С. Р. Внеклассная работа по математике: Кн. для учителя. –М.: Просвещение, 1988
3. С е ф и б е к о в С. Р. Формирование элементов исследовательской деятельности школьников по математике на основе авторских разработок «За страницами школьного учебника». Канд. дис. пед. наук. Махачкала, ДГПУ, 2004
4. Ж. «К в а н т». – 1990, №7.

Приложение

ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

«РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (МП)»

№	ТЕМА	ВСЕГО УРОКОВ
1.	Последовательности **m−ГО** порядка. Разности последовательности	**1**
2.	Выдвижение гипотезы и доказательство ее истинности. Формулировка **Теоремы 1**	**1**
3.	Обобщение **Теоремы 1 − Теорема 2**	**1**
4.	Формулировка метода последовательности **(МП)**, задачи	**7**
5.	Зачет по элективному курсу	**2**
	Итого:	**12**

ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАЧЕТА

1.Вычислить суммы:

а) $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$,

б) $S_n = 1 \bullet 2 + 2 \bullet 3 + 3 \bullet 4 + \cdots + n(n+1)$

2.На какое максимальное число частей делят:

а) плоскость **n** прямых,

б) пространство **n** плоскостей?