МЕТОД КООРДИНАТ С НУЛЯ

УРОК ВВЕДЕНИЕ

1. Нахождение координат точек
2. Основные формулы и определения.
3. Рассмотрение основных типов задач по теме.

Существует два способа решения задач по стереометрии

Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение.

Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Он очень удобен, особенно когда времени до экзамена мало, а решить задачу хочется.

Основные **алгоритмы**, задачи , которые надо знать, чтобы научиться решать задачи векторно-координатным методом.

ЗАДАЧА 1
Нахождение расстояния от точки до точки .

ЗАДАЧА 2
Нахождение расстояния от точки до прямой .

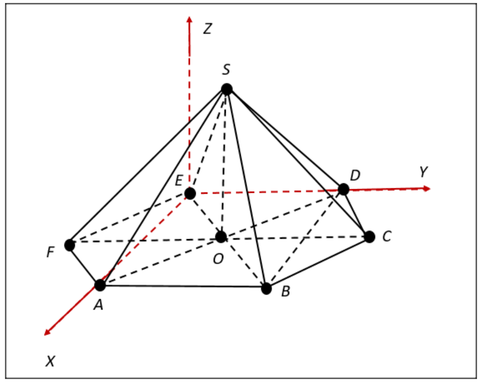
ЗАДАЧА 3
Нахождение расстояния от точки до плоскости.

ЗАДАЧА 4
Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

ЗАДАЧА 5
Нахождение угла между скрещивающимися прямыми.

ЗАДАЧА 6
Нахождение угла между плоскостями.

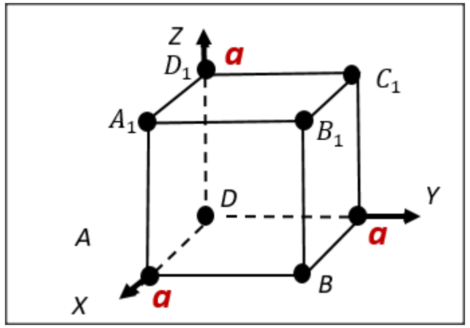
ЗАДАЧА 7
Нахождение угла между прямой и плоскостью.

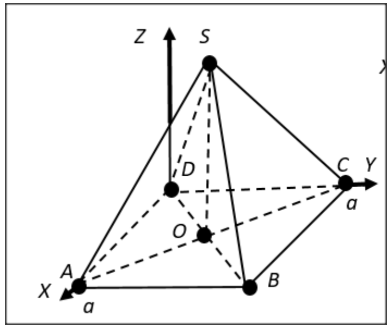


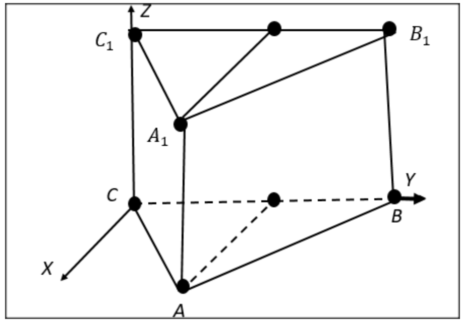
Серия уроков метод координат

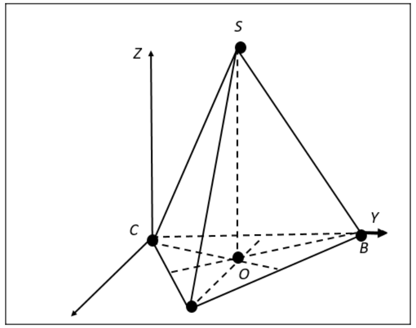
Основные **понятия и формулы**, которые надо знать, чтобы научиться решать задачи координатным методом.

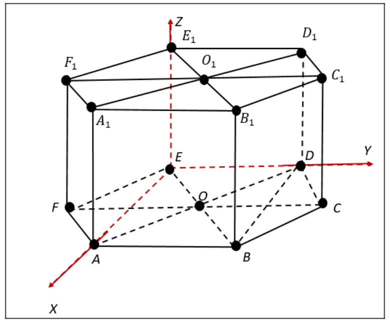
1. Координаты вершин правильного четырехугольника. Урок № 8.
2. Координаты вершин правильной четырехугольной призмы. Урок № 8.
3. Координаты вершин правильной четырехугольной пирамиды. Урок № 8.
4. Координаты вершин правильного треугольника. Урок № 9.
5. Координаты вершин правильной треугольной призмы. Урок № 9.
6. Координаты вершин правильной треугольной пирамиды . Урок № 9.
7. Координаты вершин правильного шестиугольника. Урок № 10.
8. Координаты вершин правильной шестиугольной призмы. Урок № 10.
9. Координаты вершин правильной шестиугольной пирамиды. Урок № 10.











Основные **понятия и формулы**,

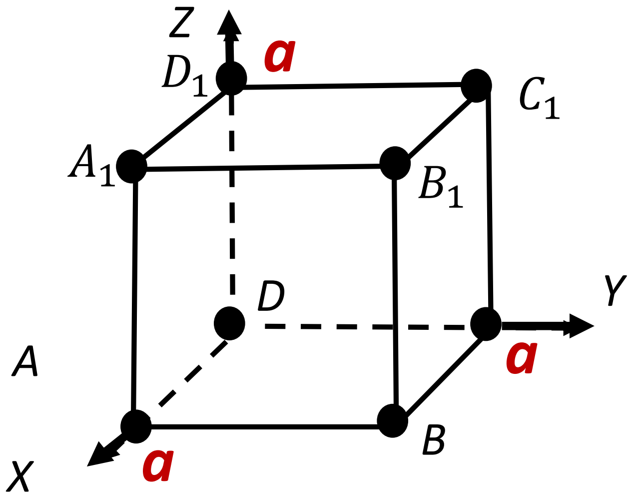
которые надо знать, чтобы научиться решать задачи координатным методом.

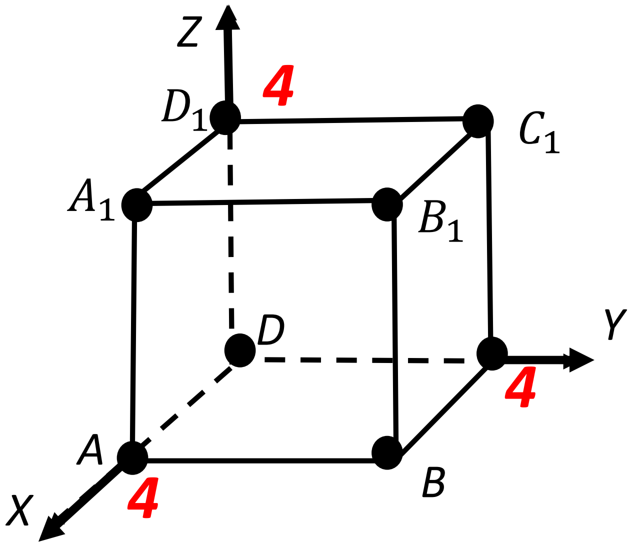
1. Определитель второго порядка. Урок № 1.
2. Определитель третьего порядка. Урок № 2.
3. Координаты вектора . Урок № 3.
4. Длина вектора. Урок № 3.
5. Скалярное произведение векторов в координатах . Урок № 3.
6. Векторное произведение векторов. Урок № 4.
7. Смешанное произведение векторов. Урок № 5.
8. Скалярное произведение векторов. Урок № 6.
9. Угол между векторами. Урок № 6.
10. Общее уравнение плоскости. . Урок № 7.
11. Уравнение плоскости проходящей через три точки. . Урок № 7.
12. Уравнение плоскости через точку и нормальный вектор плоскости. Урок № 7.

Во всех задачах данного урока имеем правильные многогранники. Все ребра равны между собой ,и равны 4.

1. Нахождение координат точек.

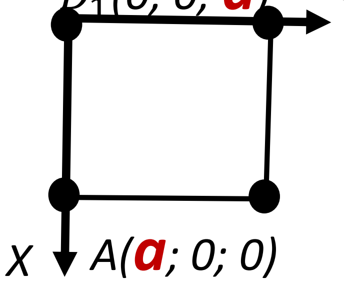
Правильная четырехугольная призма.





$D(0; 0; 0)$ $C(0; a; 0)$

$D_1(0; 0; a)$ $C_1(0; a; a)$

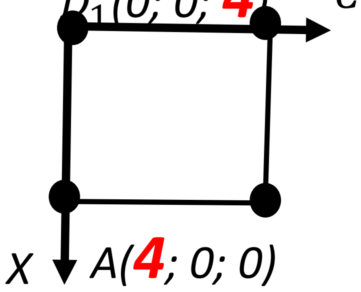


$A(a; 0; 0)$ $B(a; a; 0)$

$A_1(a; 0; a)$ $B_1(a; a; a)$

$D(0; 0; 0)$ $C(0; 4; 0)$

$D_1(0; 0; 4)$ $C_1(0; 4; 4)$

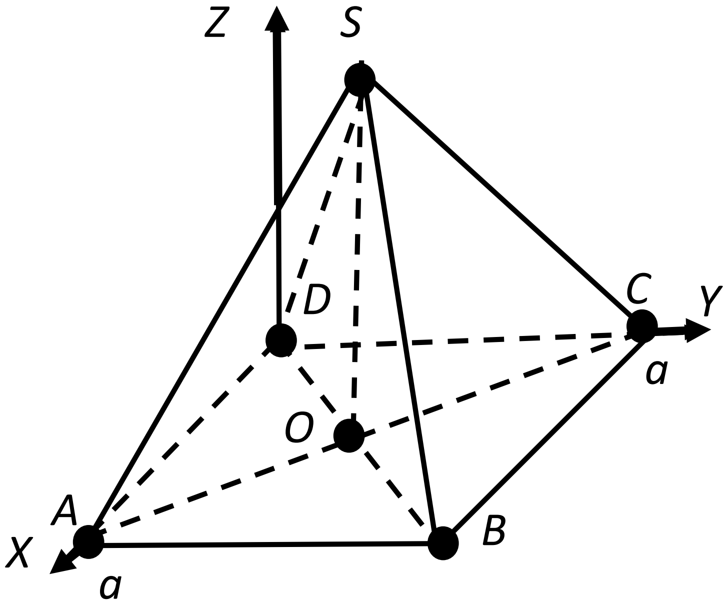


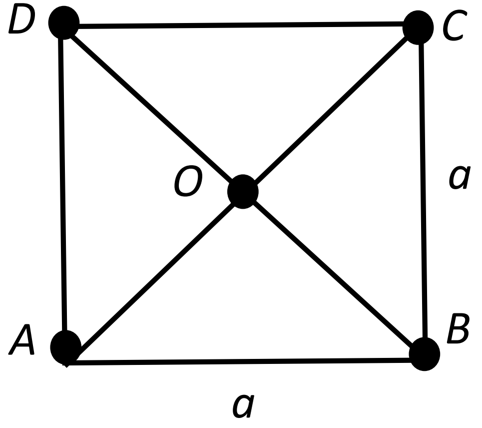
$A(4; 0; 0)$ $B(4; 4; 0)$

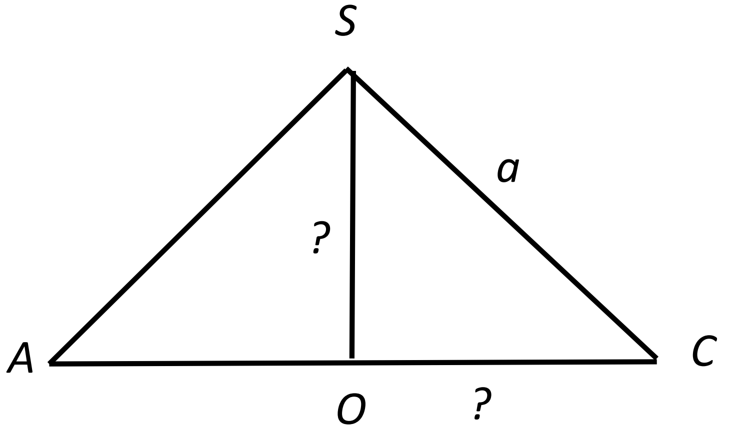
$A_1(4; 0; 4)$ $B_1(4; 4; 4)$

1. Нахождение координат точек.

Правильная четырехугольная пирамида.







$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2$$

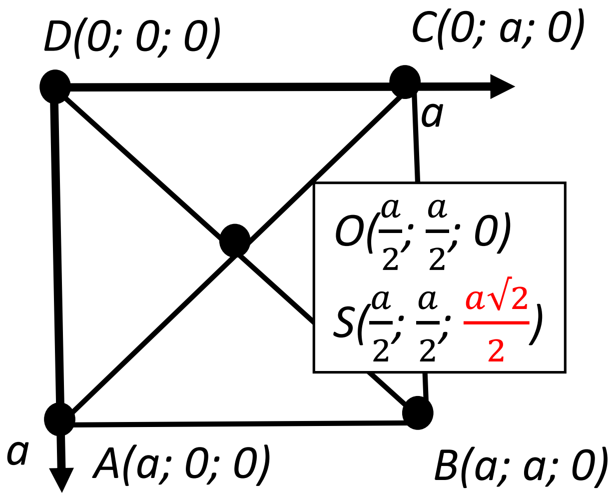
$$AC = a\sqrt{2}$$

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$OS^2 = SC^2 - OC^2$$

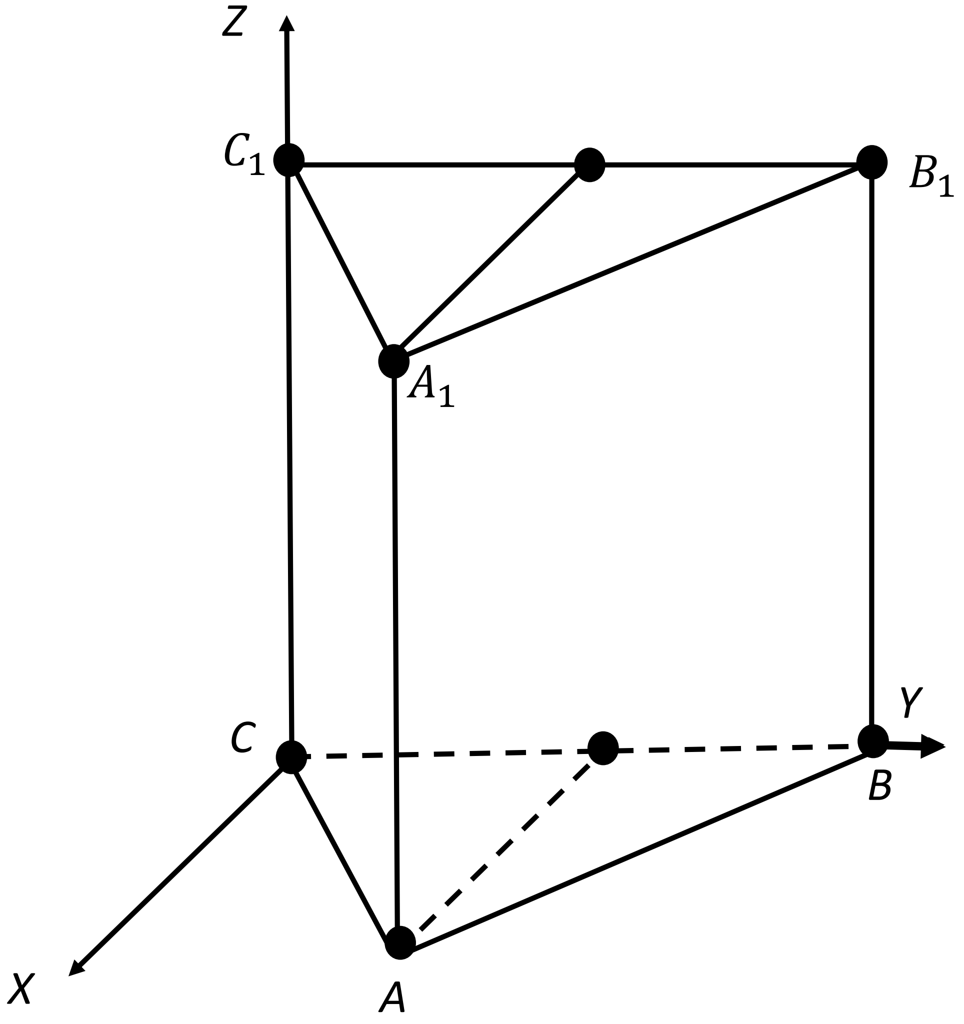
$$OS^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

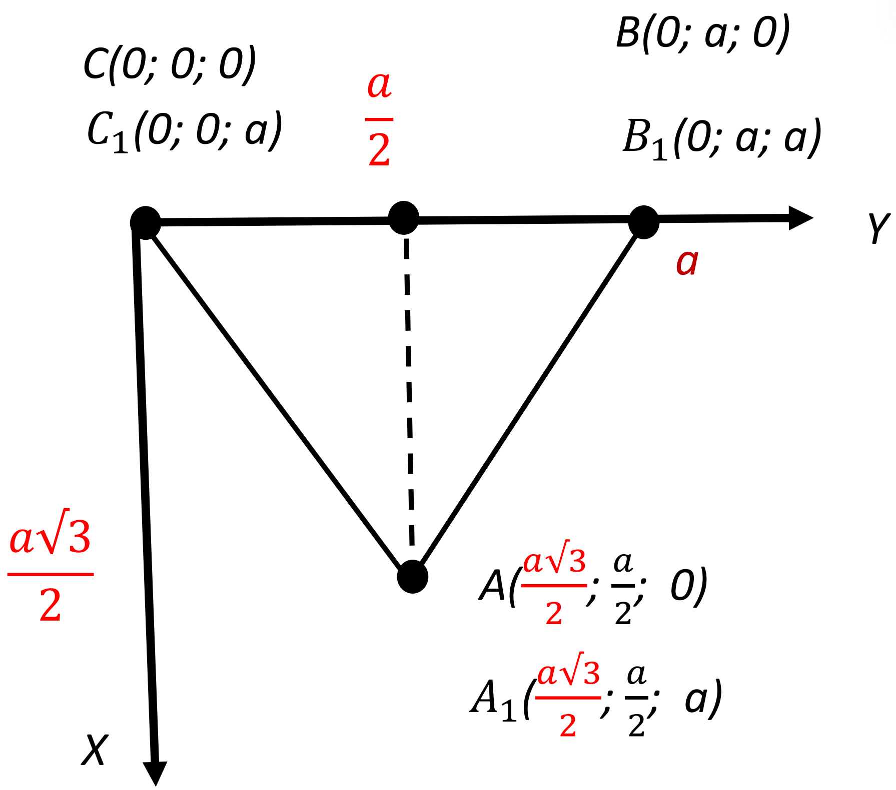
$$OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



1. Нахождение координат точек.

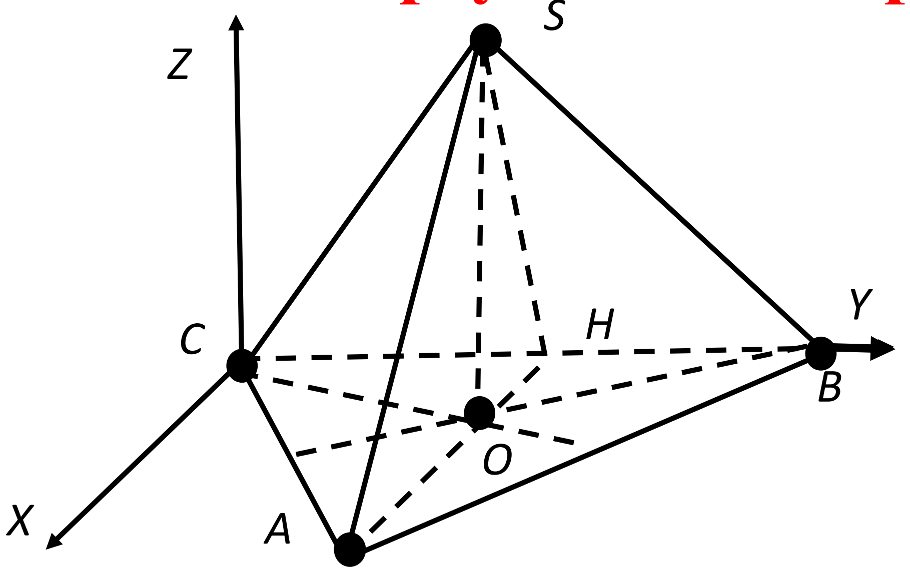
Правильная треугольная призма.





1. Нахождение координат точек.

Правильная треугольная пирамида.



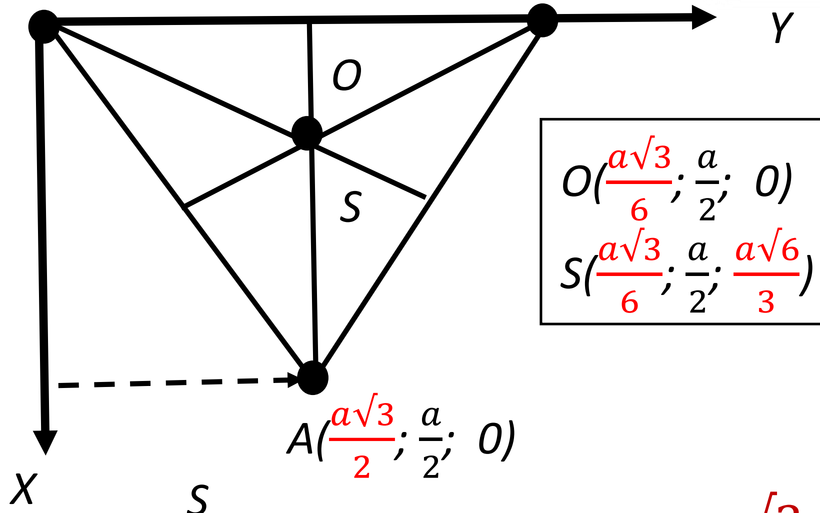
$C(0;\,0;\,0)$

$C_1(0;\,0;\,a)$

$\frac{a}{2}$

$B(0;\,a;\,0)$

$B_1(0;\,a;\,a)$

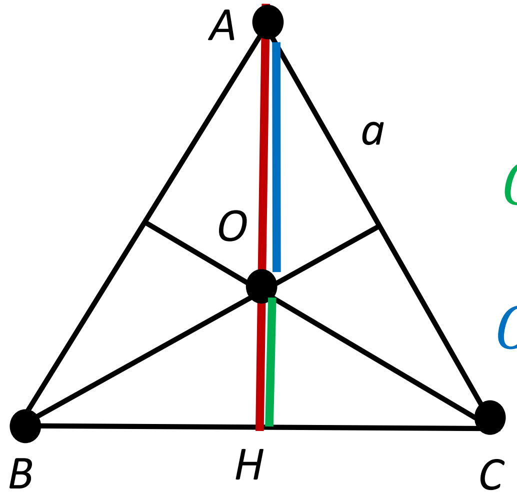


$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$A(\frac{a\sqrt{3}}{2};\,\frac{a}{2};\ 0)$

$O(\frac{a\sqrt{3}}{6};\,\frac{a}{2};\ 0)$

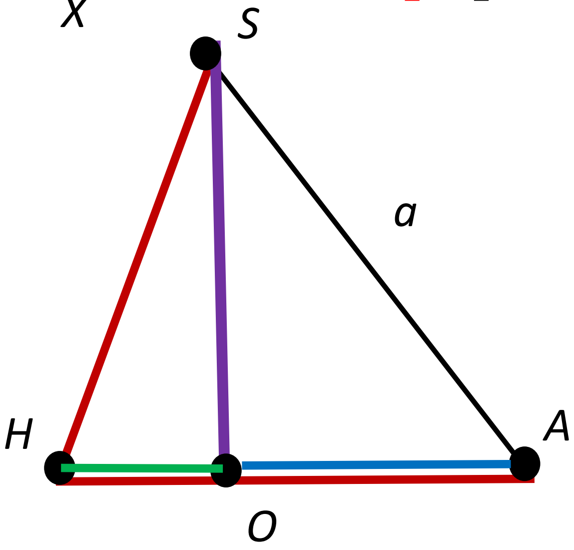
$S(\frac{a\sqrt{3}}{6};\,\frac{a}{2};\,\frac{a\sqrt{6}}{3})$



$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$OH = \frac{1}{3}\cdot AH = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$OA = \frac{2}{3}\cdot AH = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

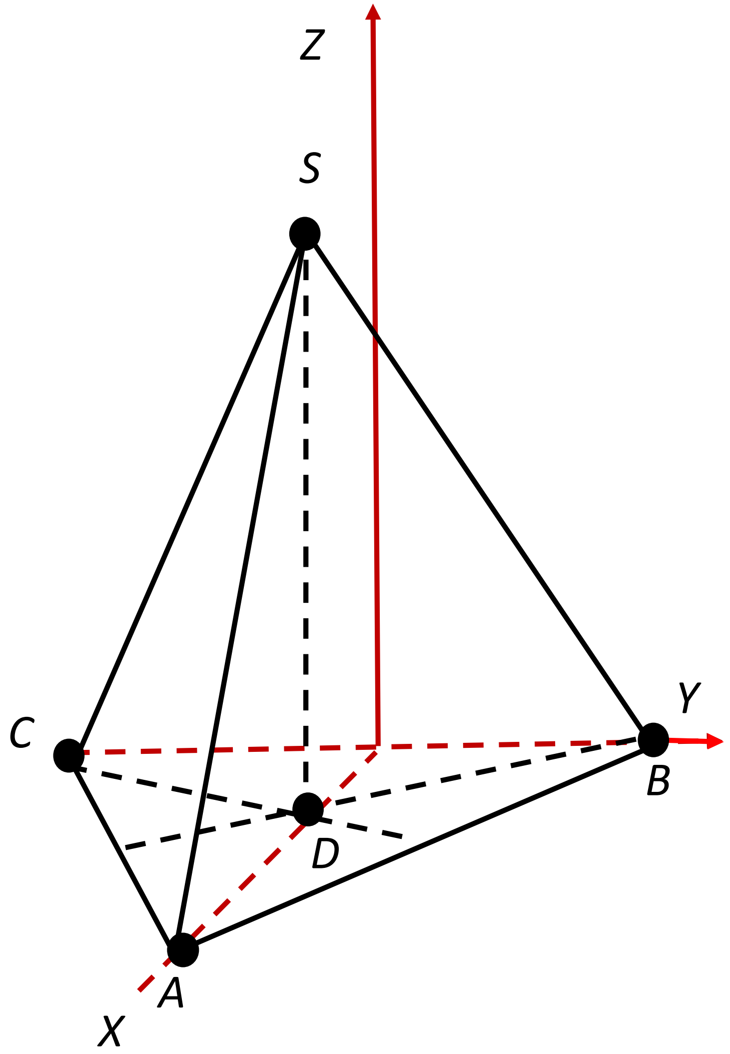
$$OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

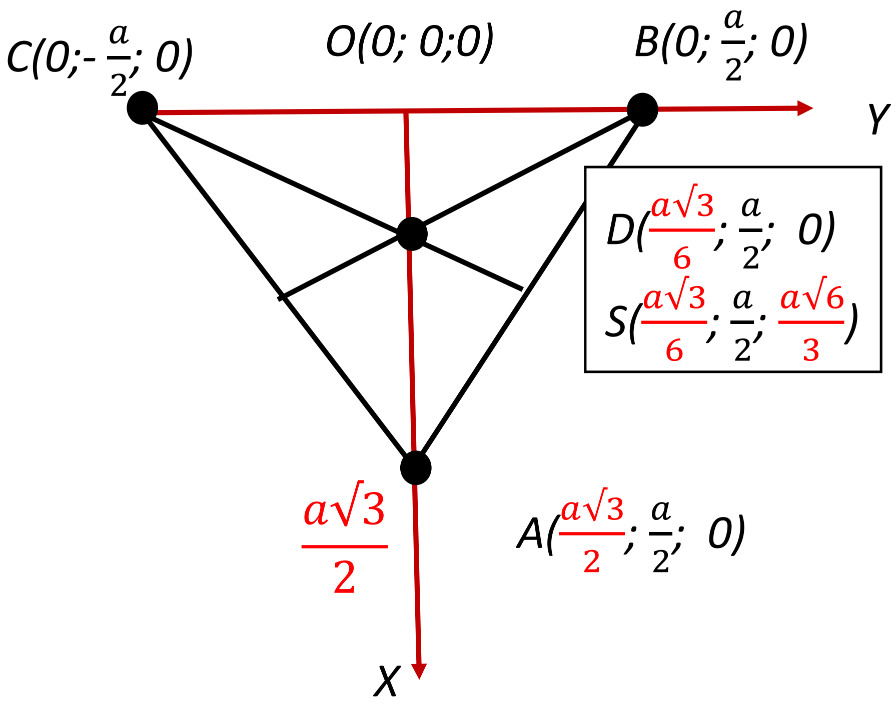
$$OS = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$OS^2 = AS^2 - AO^2 = a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{9a^2 - 3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

1. Нахождение координат точек.

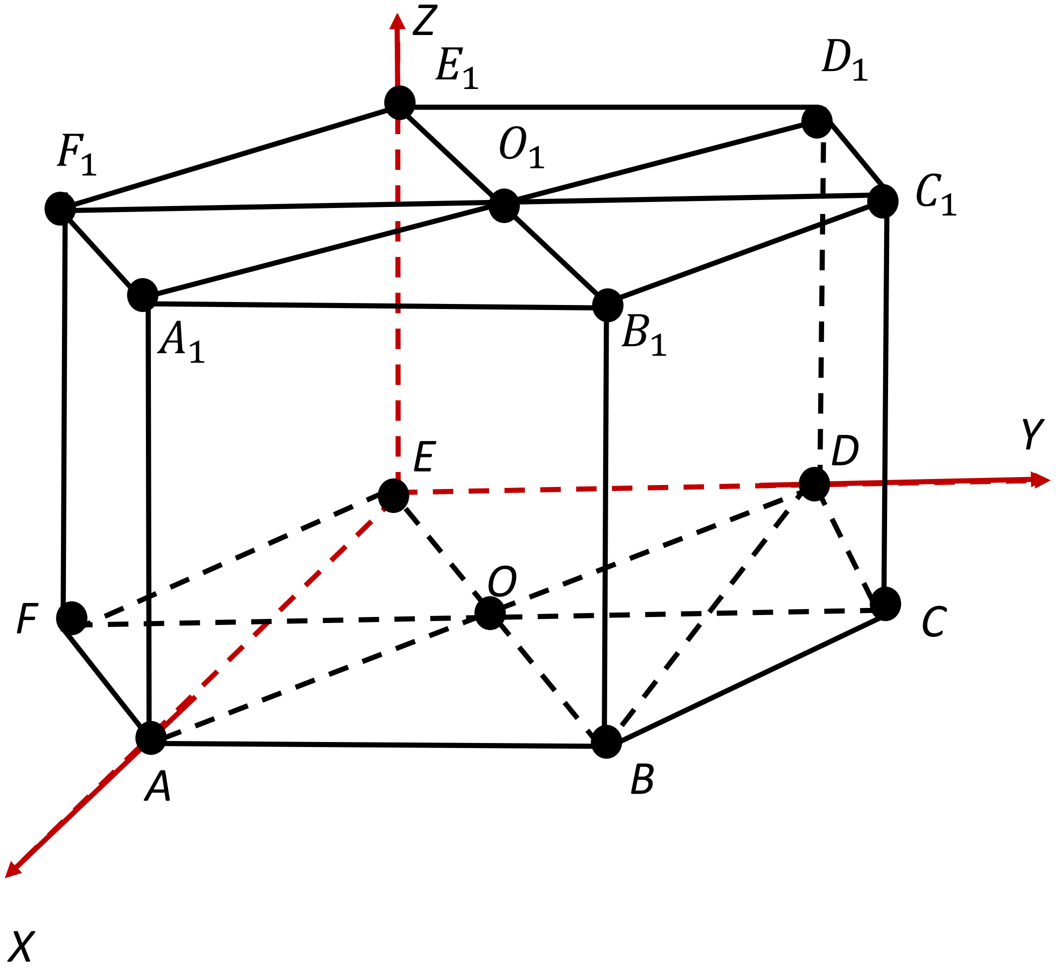
Правильная треугольная пирамида.

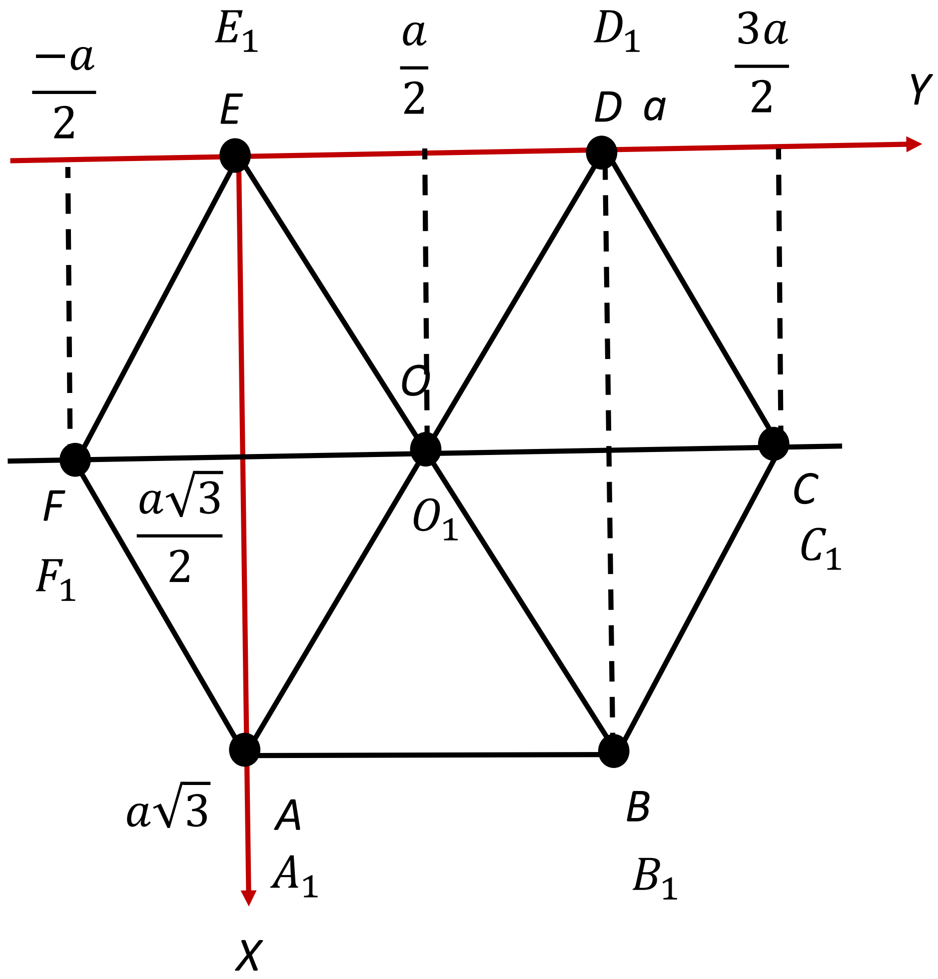




1. Нахождение координат точек.

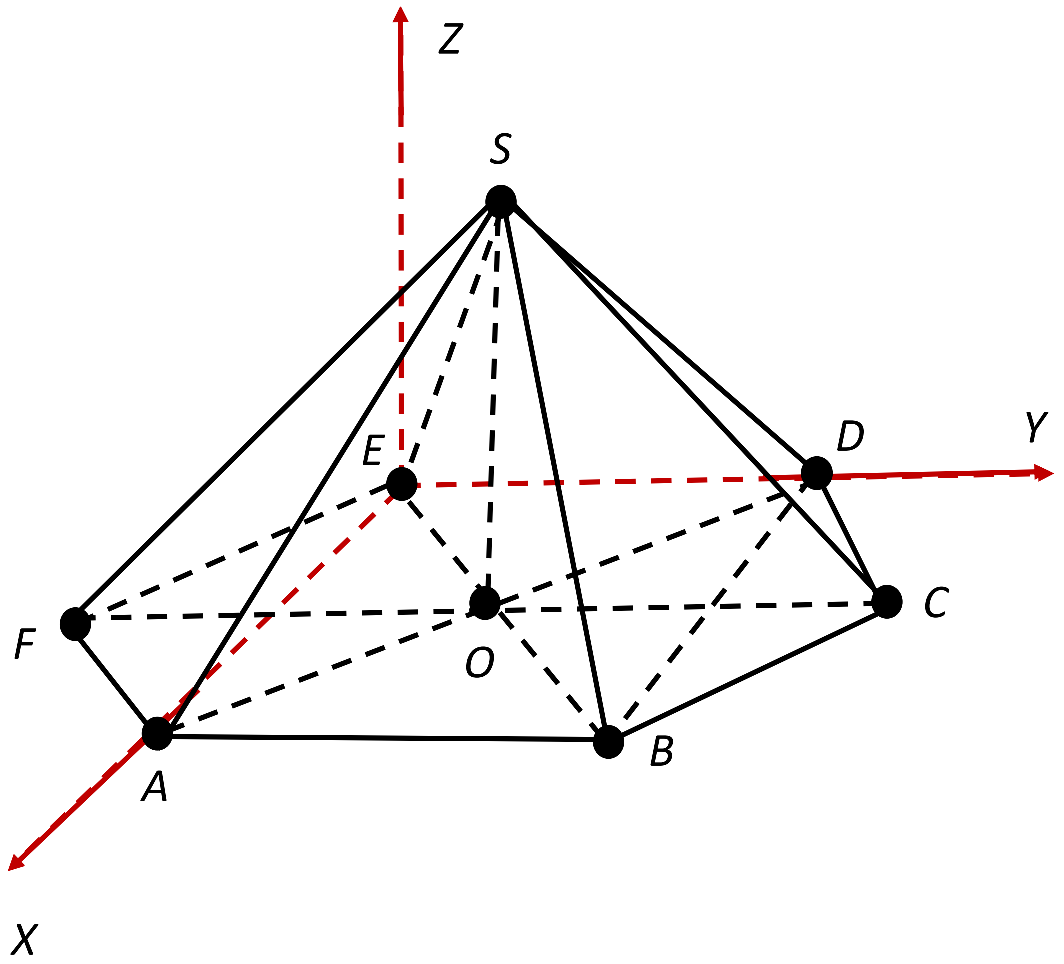
Правильная шестиугольная призма.

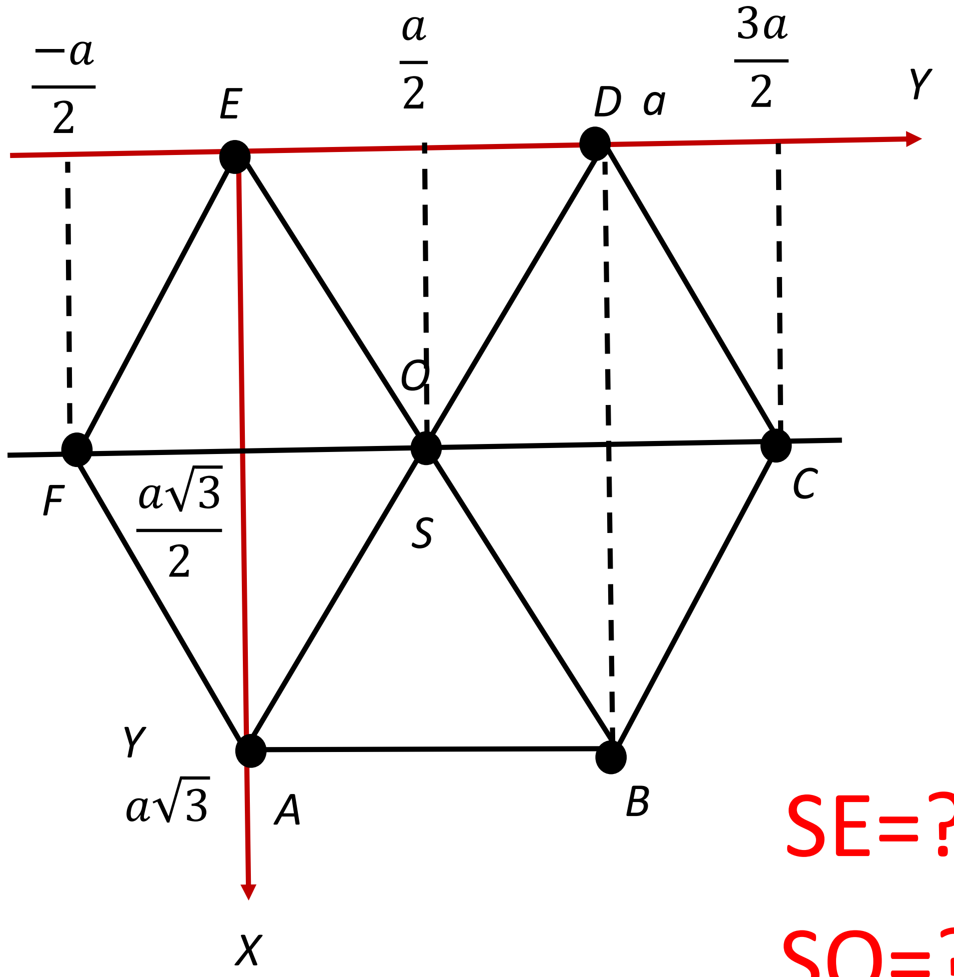




1. Нахождение координат точек.

Правильная шестиугольная пирамида.





SE=?

SO=?

Координаты вектора

Серия уроков метод координат

Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

ПРИМЕР 4.

$A(1; 2; 3)$ и $B(3; 3; 2)$ $\overrightarrow{AB}\ \{3 - 1; 3 - 2; 2 - 3\}$ $\overrightarrow{AB}\ \{2;\ 1; -1\}$

Длина вектора.

Если $\vec{a}\ \{x; y; z\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ПРИМЕР 5.

Если $\vec{a}\{1; 2; 3\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

Скалярное произведение векторов в координатах.

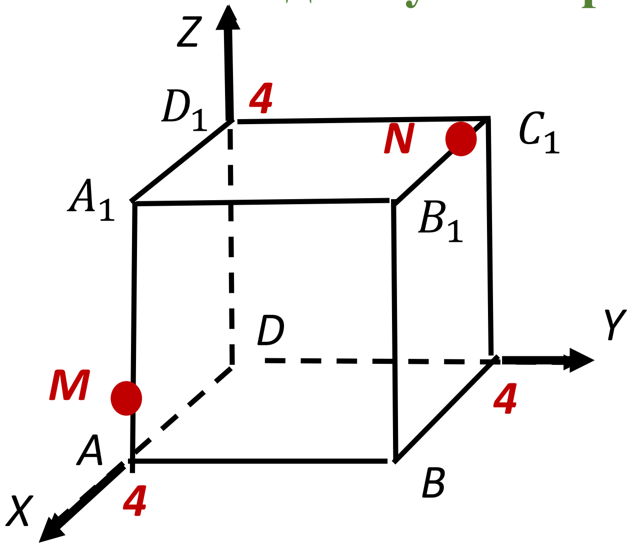
Если $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

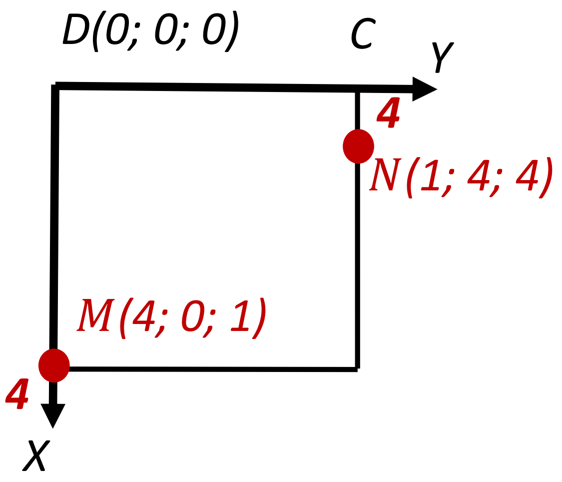
ПРИМЕР 6.

Если $\vec{a}\ \{1; 2; 3\}$ и $\vec{b}\ \{2; 1; 4\}$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 16$

ЗАДАЧА 1 Нахождение расстояния от точки M до точки N.

1. Выписать координаты точек M и N.
2. Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$.
3. Найти длину вектора $\overrightarrow{MN}$.





Дано:

Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

$AB=BC=\ldots=A_1D_1=4$

$M \in AA_1$, $AM:MA_1=1:3$

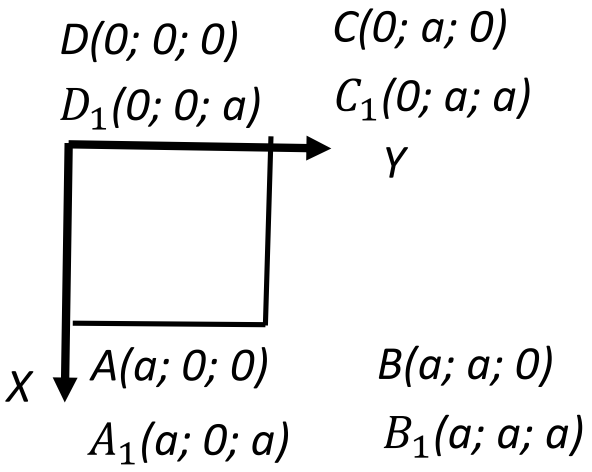
$N \in AA_1$, $C_1N:NB_1=1:3$

Найти:

Расстояние между точками M и N

Решение:

Так как $AB=BC=\ldots=A_1D_1=4$, то



$\overrightarrow{MN}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

$\overrightarrow{MN}\ \{1-4; 4-0; 4-1\}$

$\overrightarrow{MN}\ \{-3; 4; 3\}$

$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{9+16+9}=\sqrt{34}$

$MN=\sqrt{34}$

Определитель второго порядка

Пусть дана квадратная матрица второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ***Определителем второго порядка***, соответствующим заданной матрице А, называется число равное

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Для обозначения определителя используются вертикальные черточки и прописная буква Δ

Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ есть общий вид определителя второго порядка.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются ***элементами определителя***.

a_{11}, a_{22} – образуют **главную диагональ** определителя;

a_{21}, a_{12} – **побочную диагональ**.

ИТАК: определитель второго порядка есть число, равное разности произведений элементов, расположенных на главной и побочной его диагоналях.

Определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ПРИМЕР 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

РЕШЕНИЕ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$

Понятие определителя третьего порядка.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Определитель третьего порядка обозначается символом Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где числа a_{11} ; … a_{33} элементы определителя.

Рассмотрим вычисление определителя двумя способами.

Правило треугольника

Правило разложения по элементам первой строки

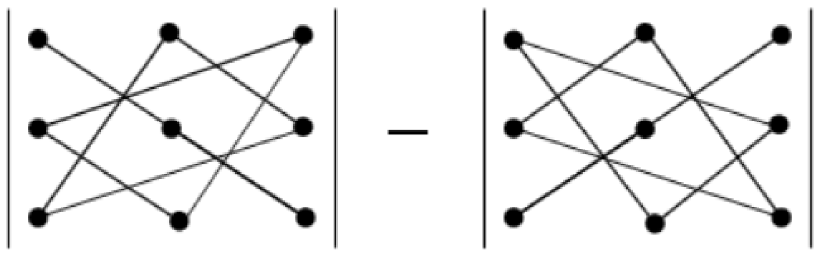
Правило треугольника

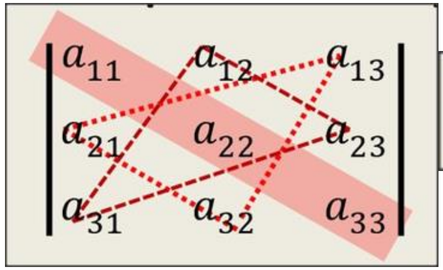
Определитель матрицы третьего порядка можно вычислить, используя правило треугольника или правило Саррюса.

Названо по имени французского математика Пьера Фредерика Саррюса.

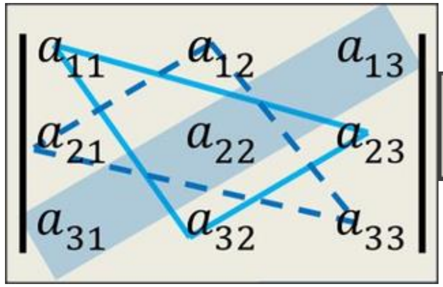
Схематически это правило можно изобразить следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} + a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32} -$$
$$- a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}.$$





$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$$



$$= - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Правило разложения по элементам первой строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице А, называется число

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Правило разложения по элементам первой строки

Пример 2. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot (7+12) =$

$= 40 + 25 + 57 = 40 + 82 = 122$

Пример 3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3$

Решение примера 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot (-3) -$$

$$-((-1) \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot (-3)) = \quad 0 - 3 + 3 - (-3 + 0 + 6) = \quad 0 - 3 = -3.$$

ЗАДАЧА 2

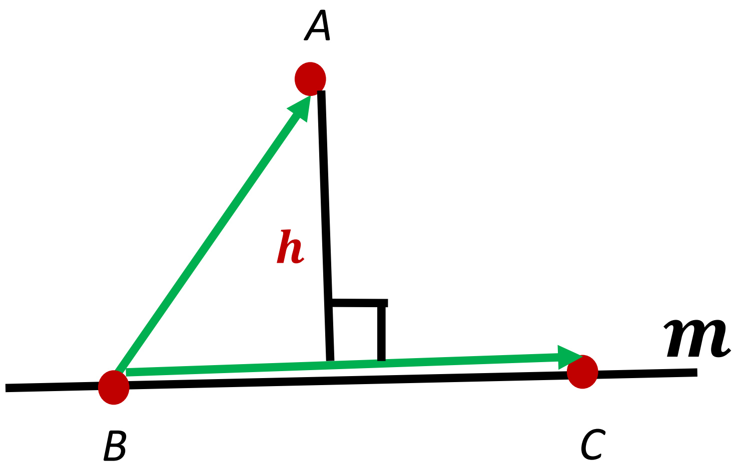
Нахождение расстояния от точки A до прямой BC.

1. Выписать координаты точек A, B и C.
2. Найти координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.
3. Найти векторное произведение $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$.
4. Найти длину векторного произведения $|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$.

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$$

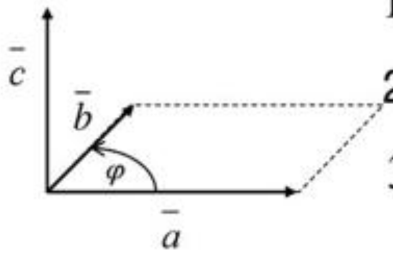
5. Найти длину вектора $\overrightarrow{BC}$. $BC = |\overrightarrow{BC}|$
6. Искомое расстояние $\rho(A, BC) = \dfrac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$.

Искомое расстояние $\rho(A, BC) = h = \dfrac{S_{ABCD}}{BC}$.



Векторное произведение векторов.

Векторным произведением векторов **a** и **b** называется вектор **c**, определяемый условиями:



1) $\bar{c} \perp \bar{a}, \quad \bar{c} \perp \bar{b},$

2) векторы *a*, *b*, *c* образуют правую тройку.

3) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi = S_{пар.},$

Если векторы заданы координатами, то координаты векторного произведения вычисляются по формуле:

то $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Если $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$

то $$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

ПРИМЕР

Если $\vec{a}\ \{1; 2; 3\}$ и $\vec{b}\ \{3; 1; 2\}$

то $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

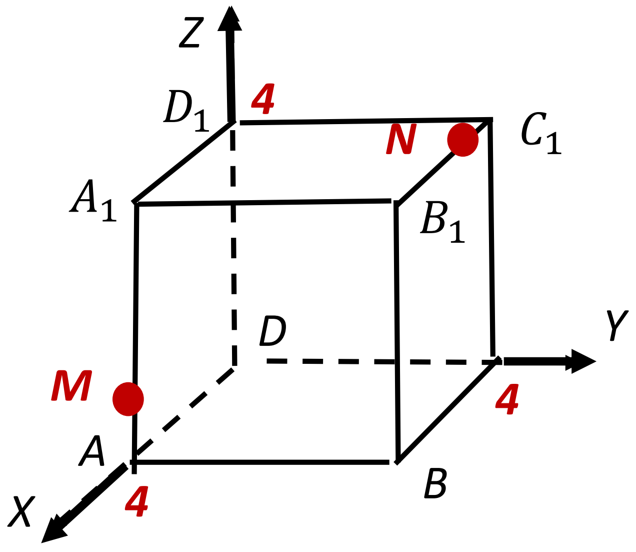
$$\vec{a} \times \vec{b} \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \right\}$$

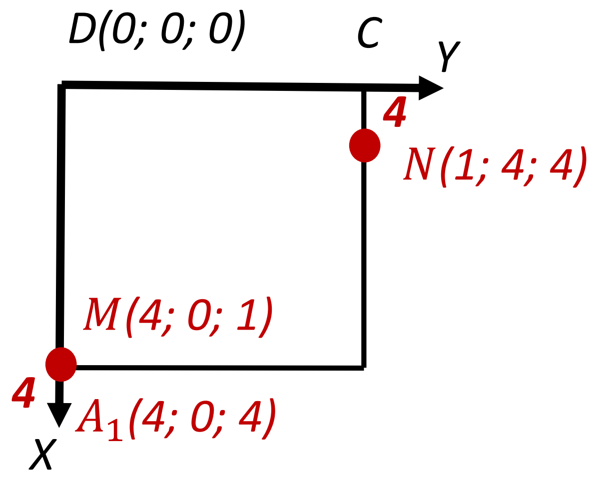
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -7;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5$$

ЗАДАЧА 2 Нахождение расстояния от точки A_1 до прямой MN.





Дано:

Куб ABCD$A_1B_1C_1D_1$

AB=BC=…=A_1D_1=4

$M \in AA_1$, AM:MA_1=1:3

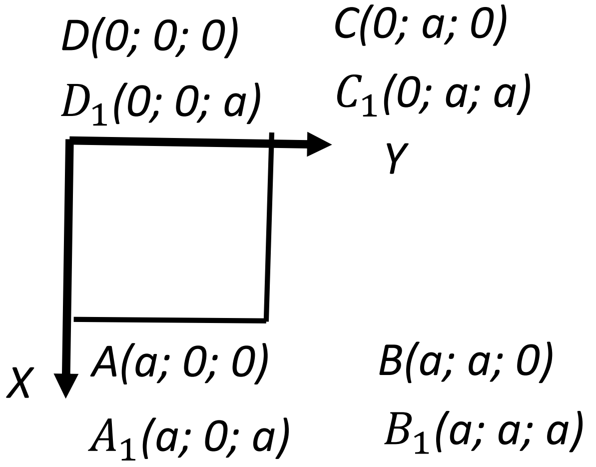
$N \in AA_1$, C_1N:NB_1=1:3

Найти:

Расстояние точки A_1 до прямой MN

Решение:

Так как AB=BC=…=A_1D_1=4, то



$$\overrightarrow{MA_1}\{4-4; 0-0; 4-1\}$$

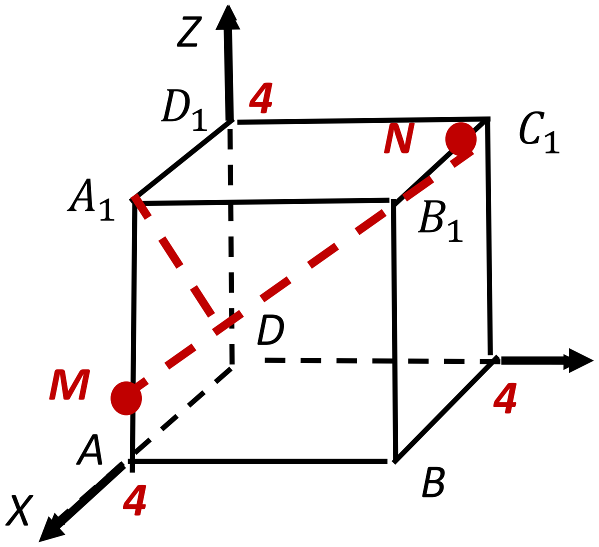
$$\overrightarrow{MA_1}\{0; 0; 3\}$$

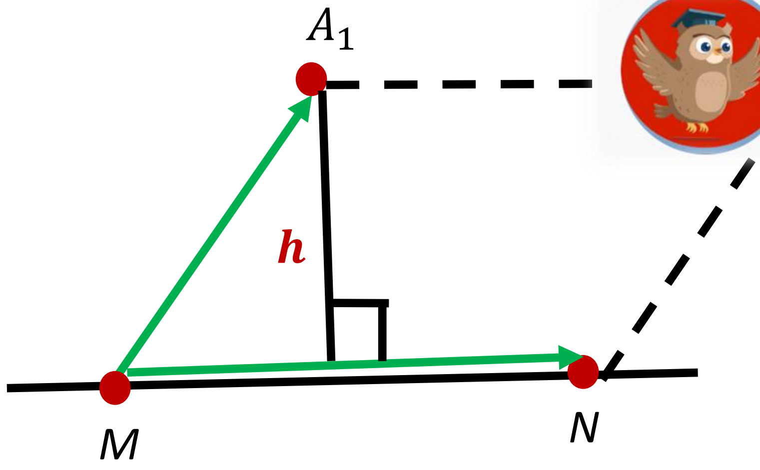
$$\overrightarrow{MN}\{1-4; 4-0; 4-1\}$$

$$\overrightarrow{MN}\{-3; 4; 3\}$$

Найти:
Расстояние точки A_1 до прямой MN

Решение:





Так как $\overrightarrow{MA_1}\{0; 0; 3\}$
$\overrightarrow{MN}\ \{-3; 4; 3\}$,

то

$$\overrightarrow{MA_1} \times \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

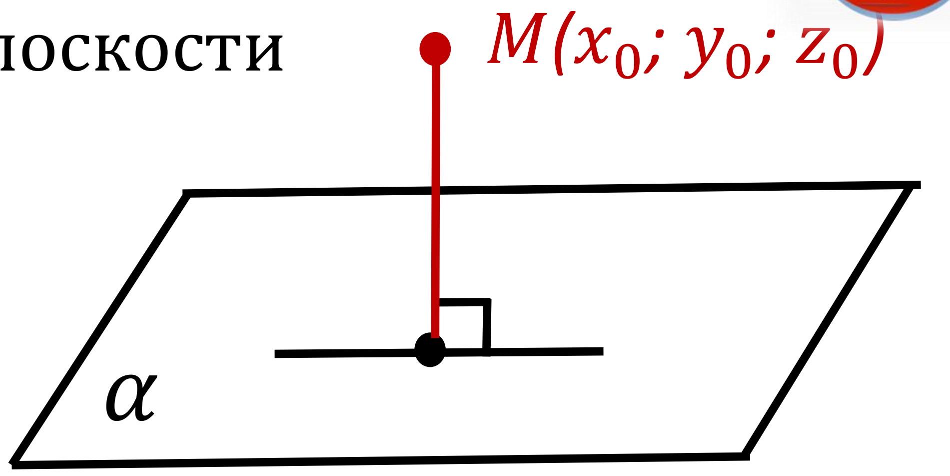
$\overrightarrow{MA_1} \times \overrightarrow{MN}\ \{-12; -9; 0\}$ $\qquad |\overrightarrow{MA_1} \times \overrightarrow{MN}| = \sqrt{144 + 81 + 0} = \sqrt{225}$

$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34}$ $\qquad$ MN$=\sqrt{34}$

Искомое расстояние $\boldsymbol{\rho(A, BC)} = \dfrac{|\overrightarrow{MA_1} \times \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{MN}|} = \dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{34}} = \dfrac{15}{\sqrt{34}}$

Задача 3. Расстояние от точки до плоскости.

Для нахождения расстояния от точки до плоскости необходимо знать:



1. Координаты точки $M(x_0; y_0; z_0)$

2. Уравнение плоскости $\alpha\colon\ Ax + By + Cz + D = 0$

И тогда

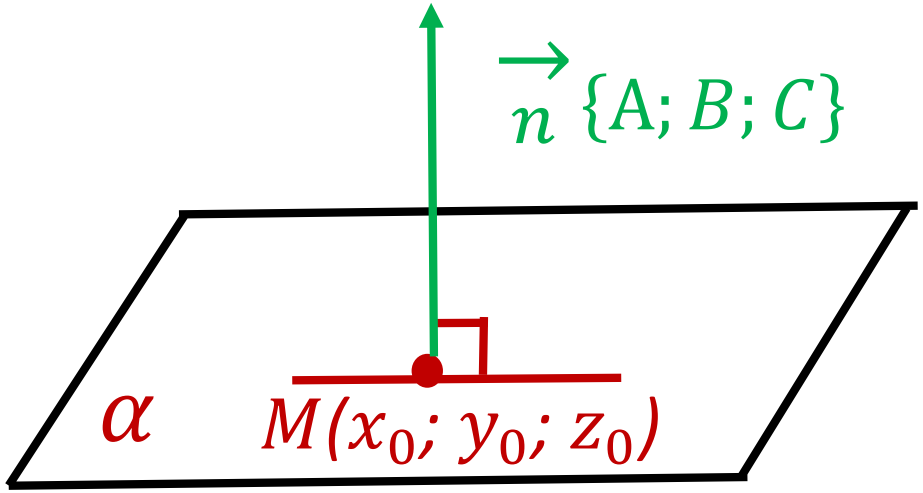
Искомое расстояние $\boldsymbol{\rho(M, \alpha)} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Уравнение плоскости.

Уравнение плоскости , проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$

перпендикулярно заданному вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$

$$\alpha:\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



$M(1; 2; 3)$

$\vec{n}\{2; 3; 5\}$

$$\alpha: 2(x-1)+3(y-2)+5(z-3)=0$$

$$\alpha: 2x+3y+5z-2-6-15=0$$

$$\alpha: 2x+3y+5z-23$$

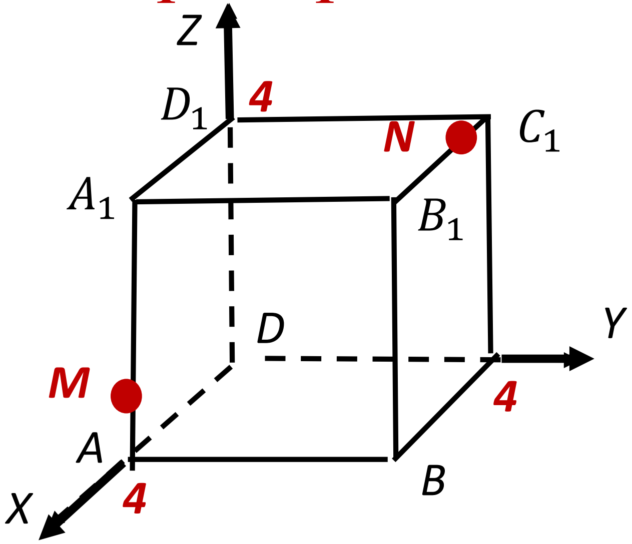
Уравнение плоскости проходящей через 3 точки.

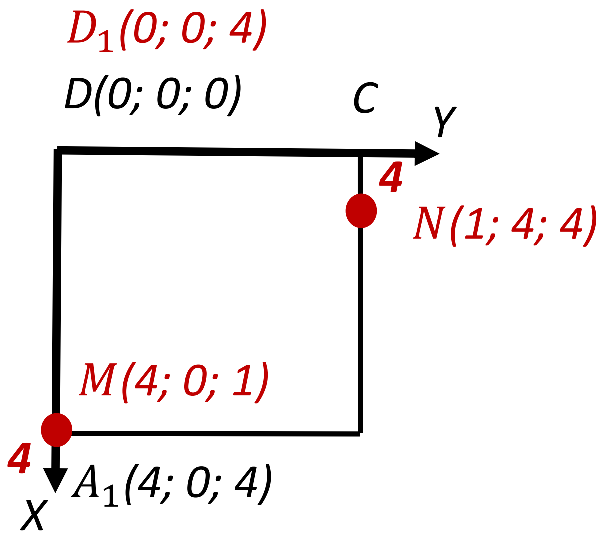
$M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3),$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - x_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - x_1)\cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - (y - y_1)\cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + (z - z_1)\cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Пример





$M(x_1; y_1; z_1)$, $M(4; 0; 1)$,
$N(x_2; y_2; z_2)$, $N(1; 4; 4)$,
$D_1(x_3; y_3; z_3)$, $D_1(0; 0; 4)$,

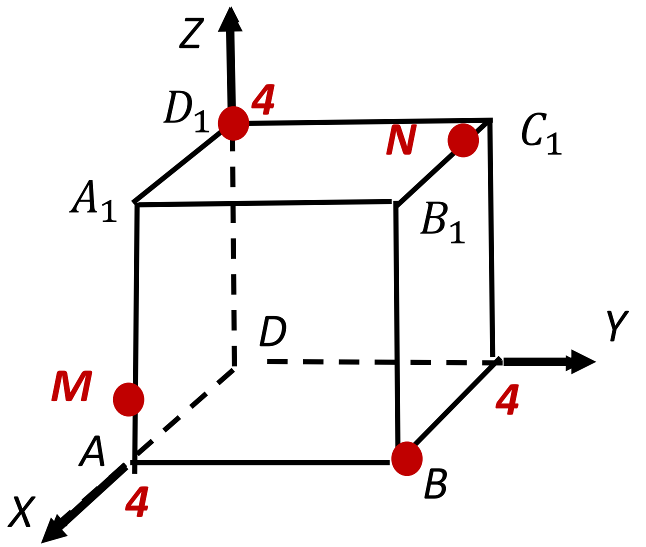
$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-1 \\ 1-4 & 4-0 & 4-1 \\ 0-4 & 0-0 & 4-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-1 \\ -3 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

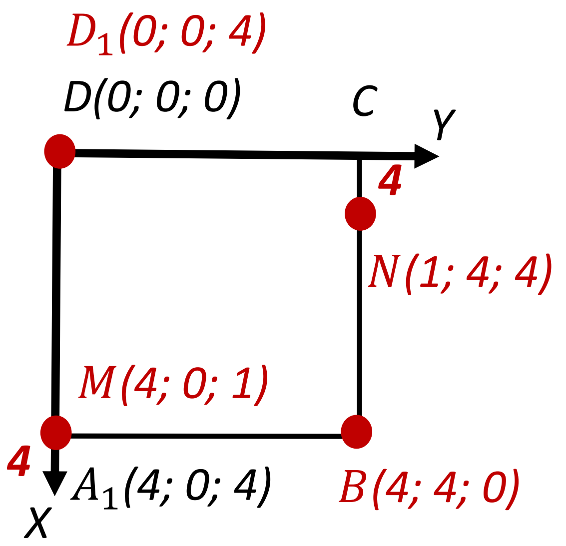
$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (y-0)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4)\cdot 12 - y\cdot 3 + (z-1)\cdot 16 = 0 \qquad 12x - 48 - 3y + 16z - 16 = 0$$

$$(MND_1):\ 12x - 3y + 16z - 64 = 0$$

Задача 3





$M(x_1; y_1; z_1)$, $M(4; 0; 1)$,
$N(x_2; y_2; z_2)$, $N(1; 4; 4)$,
$D_1(x_3; y_3; z_3)$, $D_1(0; 0; 4)$,

Найти:
расстояние от точки B до плоскости (MND_1)

1. Координаты точки $B(4; 4; 0)$

2. Уравнение плоскости (MND_1): $12x - 3y + 16z - 64 = 0$

Искомое расстояние $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B}, (MND_1)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B}, (MND_1)) = \frac{|12 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 16 \cdot 0 - 64|}{\sqrt{12^2 + (-3)^2 + 16^2}} = \frac{|48 - 12 + 0 - 64|}{\sqrt{144 + 9 + 256}} = \frac{|48 - 12 + 0 - 64|}{\sqrt{144 + 9 + 256}} = \frac{|-28|}{\sqrt{409}} = \frac{28}{\sqrt{409}}$$

ЗАДАЧА 4 Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми AB и CD.

1. Выписать координаты точек A , B , C и D .
2. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC}$.
3. Найти векторное произведение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$.
4. Найти длину векторного произведения $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|$.
5. Найти смешанное произведение векторов $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC})$
6. Искомое расстояние $\boldsymbol{\rho(AB, CD)} = \dfrac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|}$.

Искомое расстояние $\boldsymbol{h} = \dfrac{V_{\text{парал.}}}{S_{\text{основания парал.}}}$.

Смешанное произведение векторов.

Если $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$; $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$ и $\vec{c}\ \{x_3; y_3; z_3\}$

то $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$;

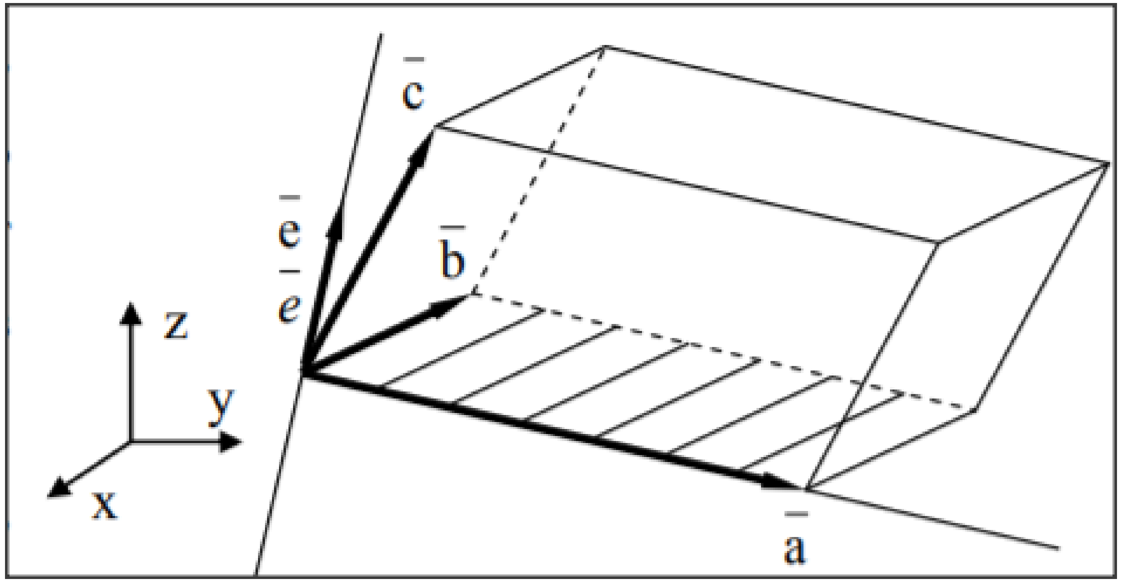
- **<u>Определение.</u> Смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$

- Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ по абсолютному значению равно объёму параллелепипеда (см. рисунок), образованного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

знак зависит от того, является ли эта тройка векторов правой или левой.

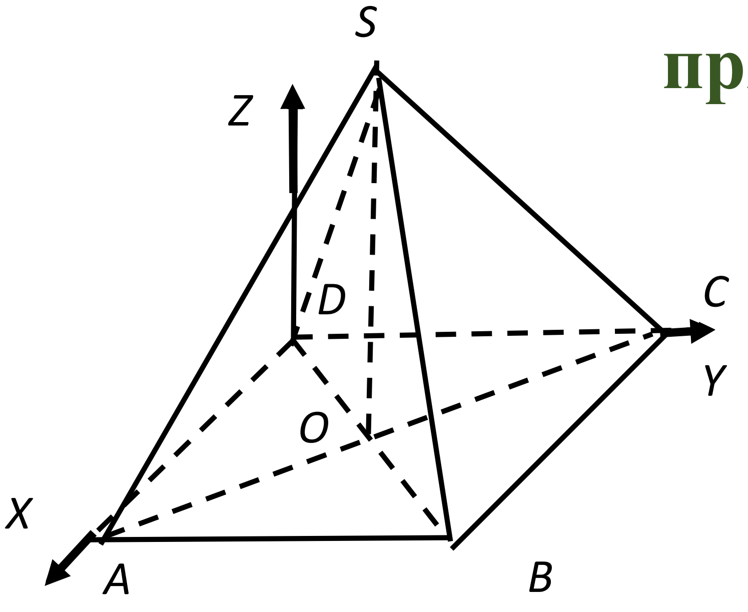


$$\boldsymbol{\rho(AB, CD)} = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|}$$

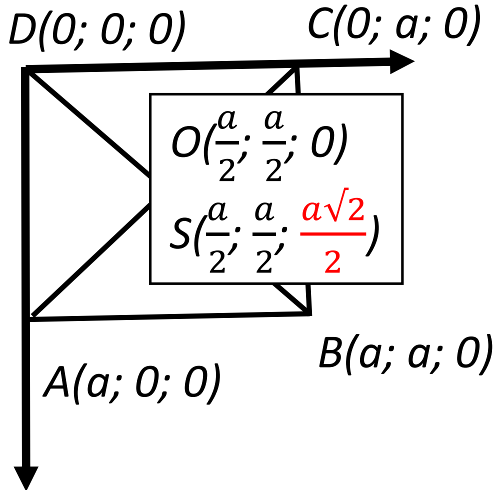
$$\boldsymbol{h} = \frac{V_{\text{парал.}}}{S_{\text{основания парал.}}}$$

ЗАДАЧА 4

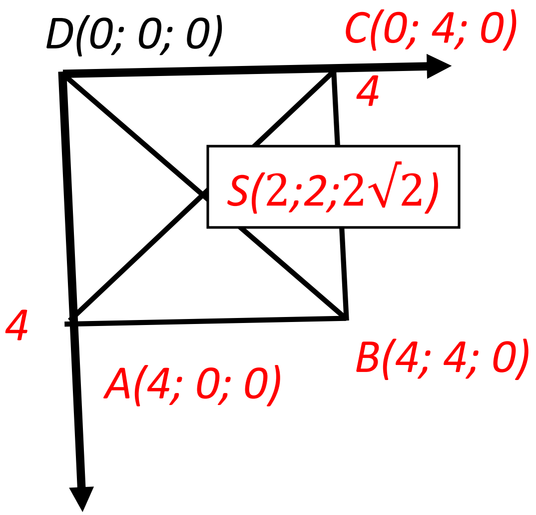
Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми AB и SC.



$$OS = \frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



1.



2. $A(4;0;0)$, $B(4;4;0)$, $S(2;2;2\sqrt{2})$, $C(0;4;0)$,

3. $\overrightarrow{AB}\ \{0;4;0\}$

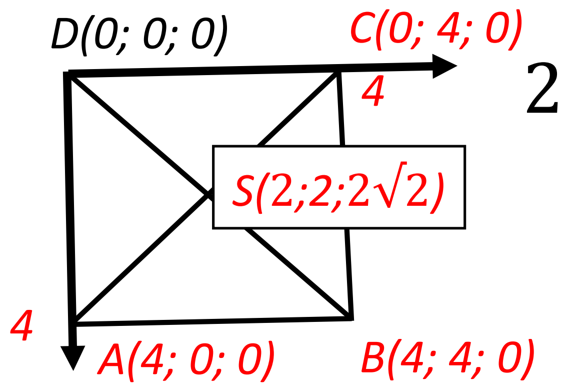
$\overrightarrow{SC}\ \{-2;2;-2\sqrt{2}\}$

$\overrightarrow{AS}\ \{-2;2;2\sqrt{2}\}$

4. $$\rho(AB, CD) = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AS})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{SC}|}.$$

ЗАДАЧА 4 Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми AB и SC.

1.



2. $A(4;0;0)$, $B(4;4;0)$, $S(2;2;2\sqrt{2})$, $C(0;4;0)$,

3. $\overrightarrow{AB}\,\{0;4;0\}$

$\overrightarrow{SC}\,\{-2;2;-2\sqrt{2}\}$

$\overrightarrow{AS}\,\{-2;2;2\sqrt{2}\}$

4. $$\rho(AB,CD)=\frac{|(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{SC},\ \overrightarrow{AS})|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{SC}|}.$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AS})=\begin{vmatrix}0&4&0\\-2&2&-2\sqrt{2}\\-2&2&2\sqrt{2}\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}2&-2\sqrt{2}\\2&2\sqrt{2}\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}-2&-2\sqrt{2}\\-2&2\sqrt{2}\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-2&2\\-2&2\end{vmatrix}=32\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{SC}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}4&0\\2&-2\sqrt{2}\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}0&0\\-2&-2\sqrt{2}\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0&4\\-2&2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-8\sqrt{2})-\vec{j}\cdot 0+\vec{k}\cdot 8$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{SC}|=8\sqrt{3}$$

ИТАК: $\rho(AB,CD)=\dfrac{32\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Угол между векторами

Серия уроков метод координат

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ всегда образуют угол.

Если $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 16$

$$cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

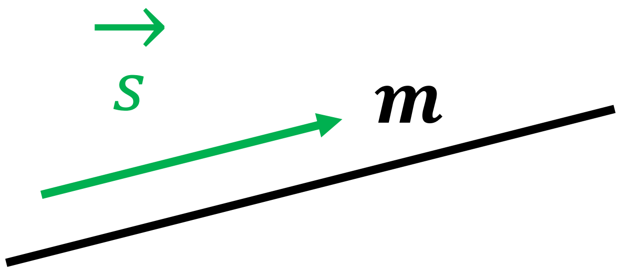
ПРИМЕР 7.

Если $\vec{a}\,\{1; 2; 3\}$ и $\vec{b}\,\{2; 1; 4\}$, то

$$\boldsymbol{cos\alpha} = \frac{1\cdot2+2\cdot1+3\cdot4}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+4^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}} = \frac{16}{7\sqrt{6}} = \frac{16\cdot\sqrt{6}}{7\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{16\sqrt{6}}{7\cdot6} = \frac{8\sqrt{6}}{21}$$

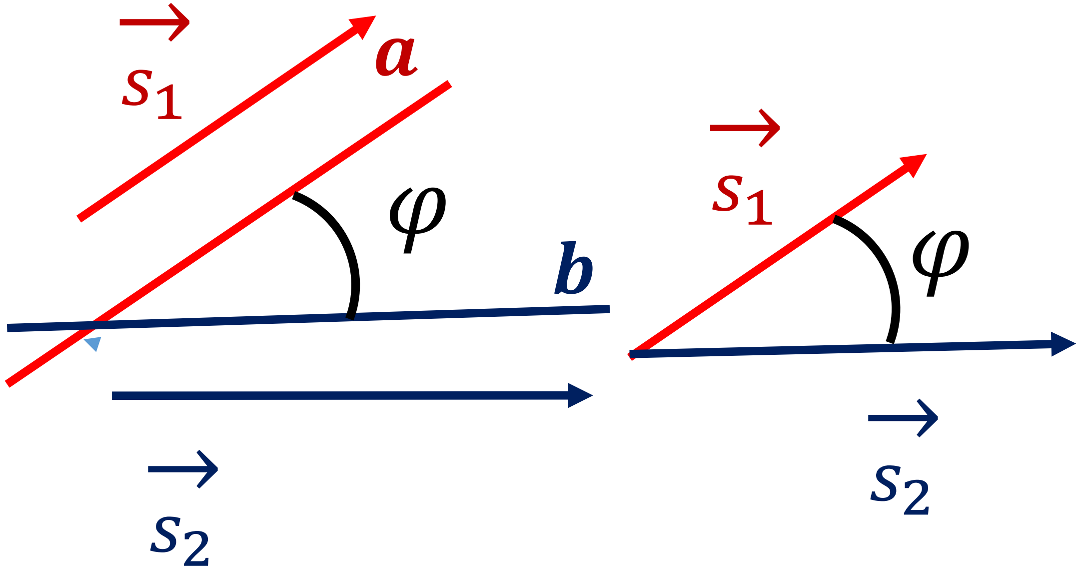
Угол между прямыми

Вектор называют направляющим вектором прямой, если он находится на прямой или параллелен этой прямой.



Чтобы определить косинус угла между прямыми, надо определить косинус угла между направляющими векторами этих прямых, то есть найти векторы, параллельные прямым, и определить косинус угла между векторами.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}| \cdot |\vec{s_2}|}$$



$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

$$\cos(\widehat{a, b}) = |\cos\varphi|$$

ЗАДАЧА 5

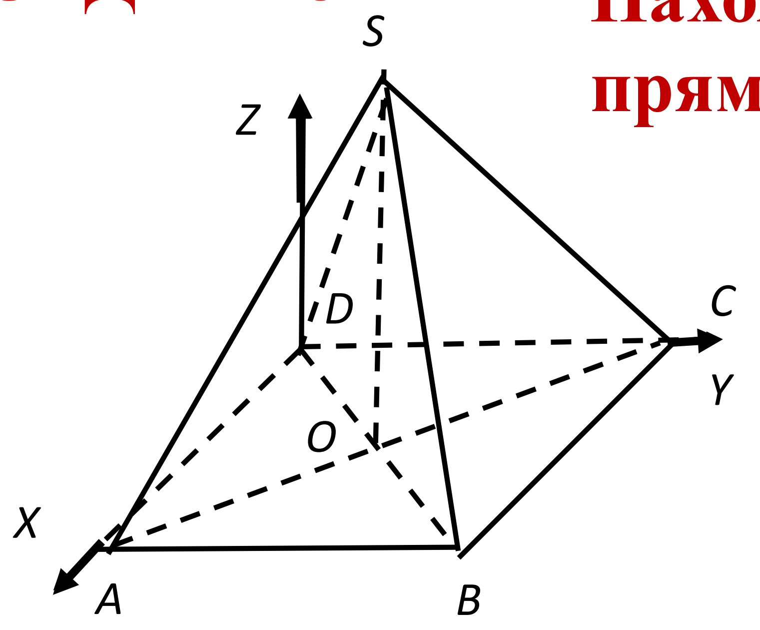
Нахождение угла между скрещивающимися прямыми AB и CD.

1. **Пишем координаты точек A , B , C и D .**
2. **Найти координаты векторов** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **.**
3. **Найти скалярное произведение векторов** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **.**
4. **Найти длины векторов** $|\overrightarrow{AB}|$ **и** $|\overrightarrow{CD}|$ **.**
5. $$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}\right|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$$

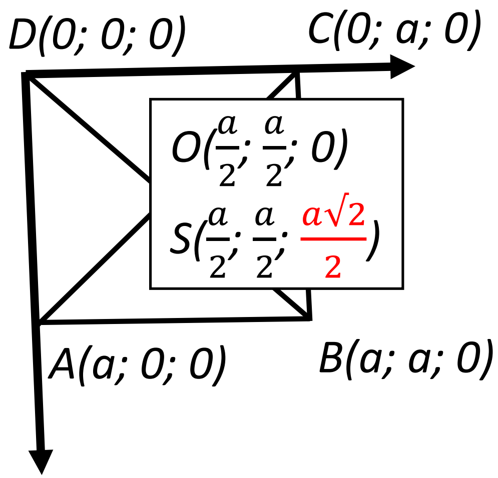
Или $$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

ЗАДАЧА 5

Нахождение угла между скрещивающимися прямыми AB и SC.



$$OS=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$A(4; 0; 0)$,
$B(4; 4; 0)$,
$S(2; 2; 2\sqrt{2})$,
$C(0; 4; 0)$,

$\overrightarrow{AB}\ \{0; 4; 0\}$

$\overrightarrow{SC}\ \{-2; 2; -2\sqrt{2}\}$

$$\cos(\widehat{AB,SC})=|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC})|$$

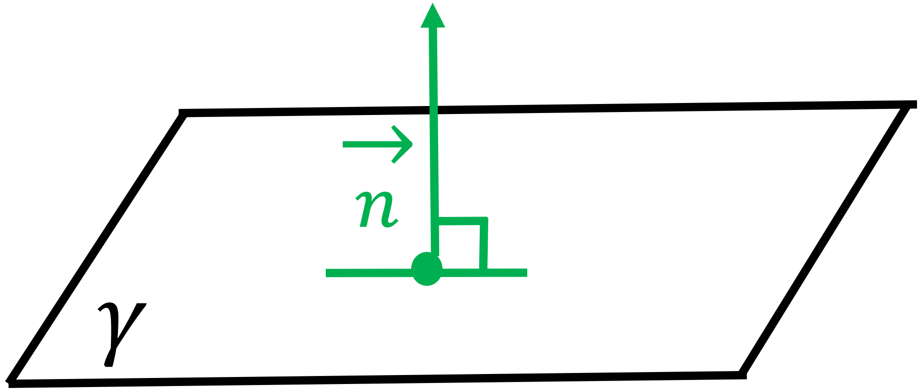
$$\cos(\widehat{AB,SC})=\frac{|0\cdot(-2)+4\cdot 2+0\cdot(-2\sqrt{2})|}{\sqrt{0^2+4^2+0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2\sqrt{2})^2}}$$

$$\cos(\widehat{AB,SC})=\frac{8}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{16}}=\frac{1}{2}$$

$$\varphi=\widehat{AB,SC}=\arccos\frac{1}{2}=60°$$

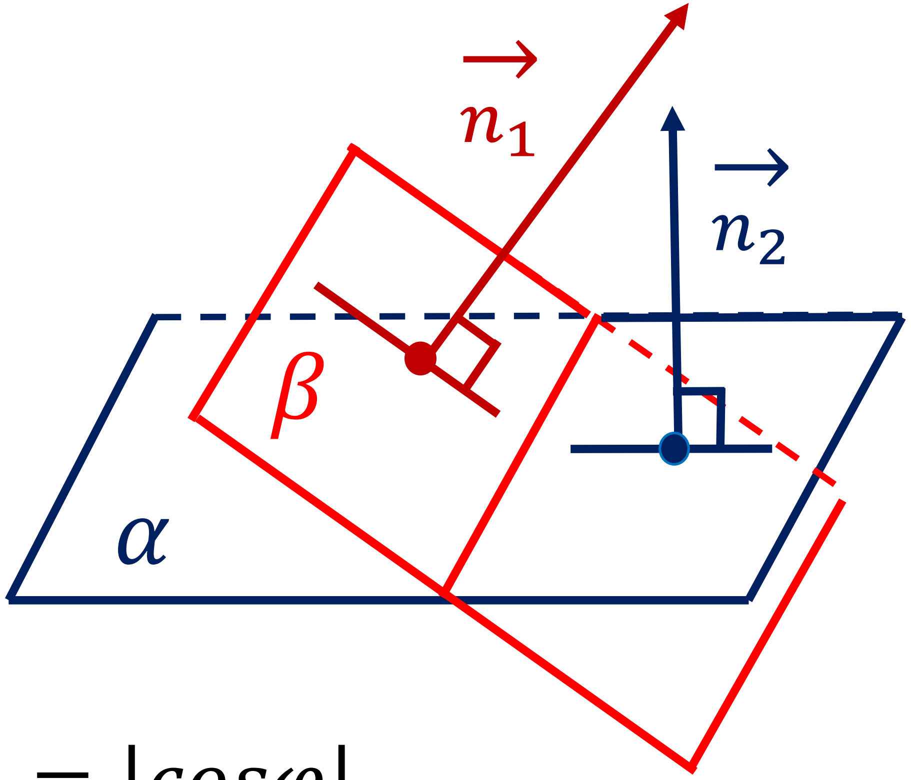
Угол между плоскостями

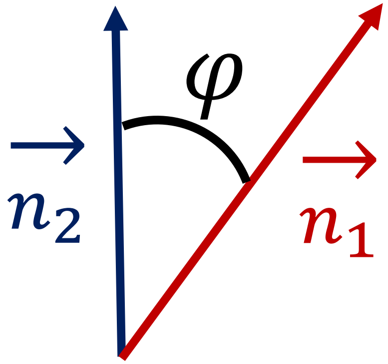
Нормальный вектор плоскости — это любой ненулевой вектор, лежащий на прямой, перпендикулярной к данной плоскости.



$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}$$





$$\cos\widehat{(\alpha,\beta)} = |\cos\varphi|$$

ЗАДАЧА 6 Нахождение угла между плоскостями

1. **Пишем координаты точек.**

2. **Пишем уравнение плоскости (ABC).**

3. **Из уравнения плоскости (ABC) выпишем координаты нормального вектора.**

4. **Пишем уравнение плоскости (DEF).**

5. **Из уравнения плоскости (DEF) выпишем координаты нормального вектора.**

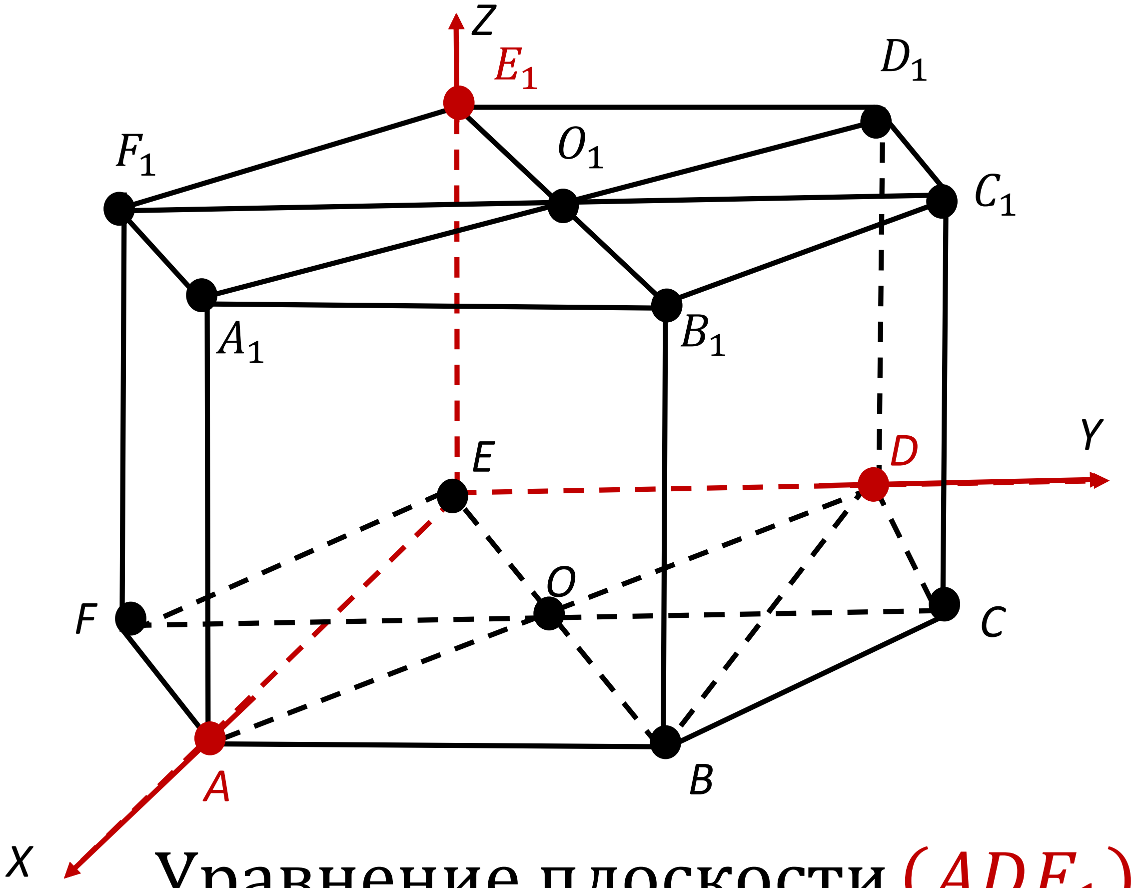
3. **Найти скалярное произведение нормальных векторов .**

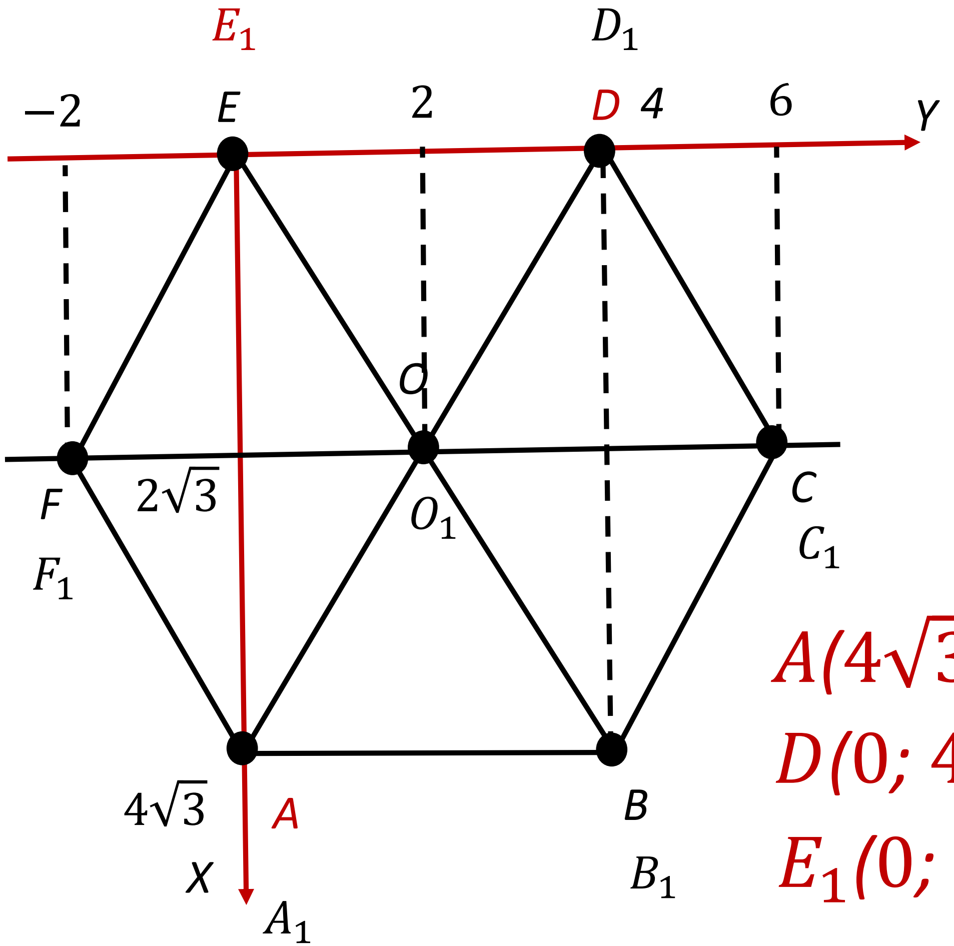
4. **Найти длины векторов** $\overrightarrow{|n|}$ **и** $\overrightarrow{|n_1|}$ **.**

5. $$cos\alpha = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{n_1}\right|}{\overrightarrow{|n|} \cdot \overrightarrow{|n_1|}}$$

Нахождение угла между плоскостями (ADE_1) и (ABC)

Правильная шестиугольная призма.





$A(4\sqrt{3};\ 0;\ 0)$

$D(0;\ 4;\ 0)$

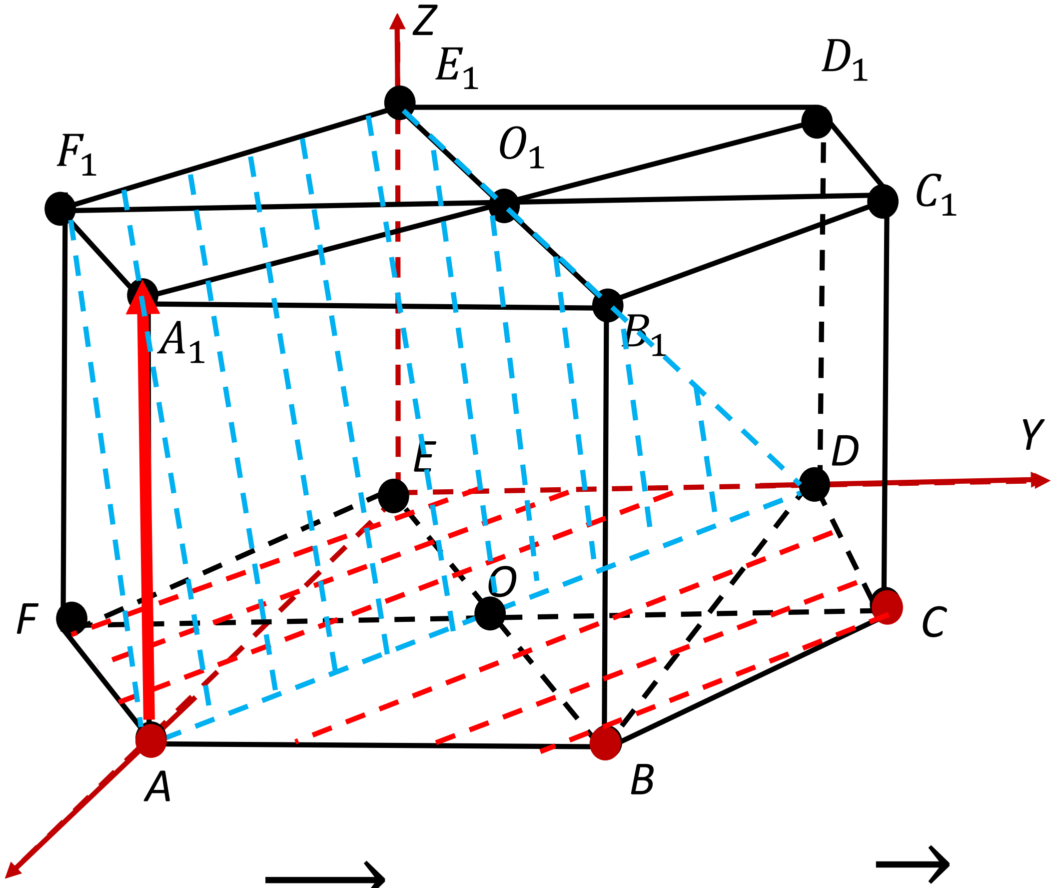
$E_1(0;\ 0;\ 4)$

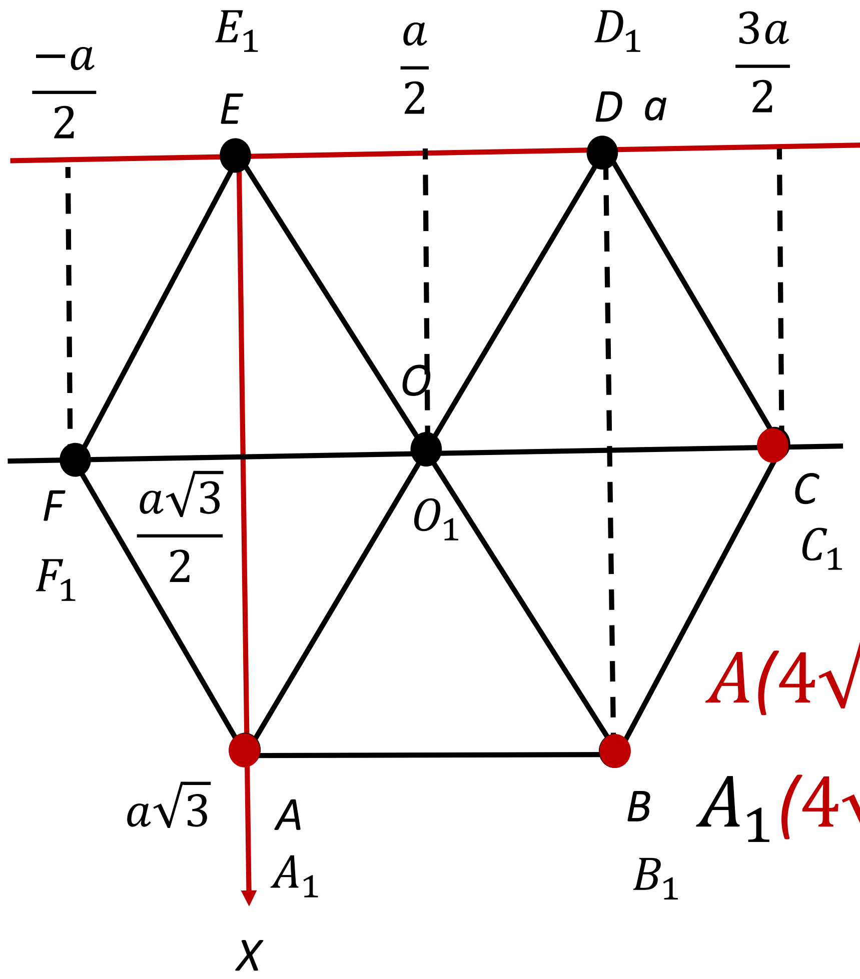
Уравнение плоскости (ADE_1): $-16x + 16\sqrt{3}y + 16\sqrt{3}z - 64\sqrt{3} = 0$

$\overrightarrow{m_1}\ \{-16;\ 16\sqrt{3};\ 16\sqrt{3}\}$ $\quad$ $\overrightarrow{n_1}\ \{-1;\ \sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$

Нахождение угла между плоскостями (ADE_1) и (ABC)

Правильная шестиугольная призма.





$A(4\sqrt{3};\,0;\,0)$

$A_1(4\sqrt{3};\,0;\,4)$

$\overrightarrow{AA_1}\{0;\,0;\,4\}$ $\qquad$ $\overrightarrow{n_2}\{0;\,0;\,1\}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AA_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$

Нахождение угла между плоскостями (ADE_1) и (ABC)

$\overrightarrow{n_1}\ \{-1;\ \sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$

$\overrightarrow{n_2}\ \{0;\ 0;\ 1\}$

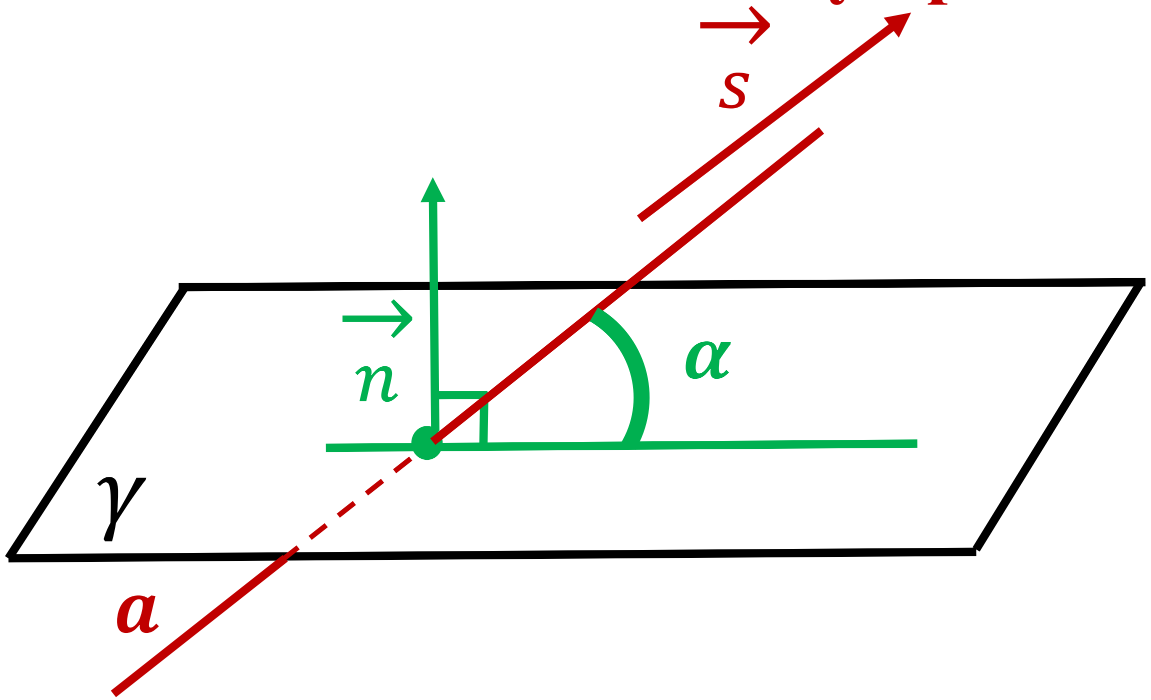
$$\cos\varphi = \frac{\left|\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\ \right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

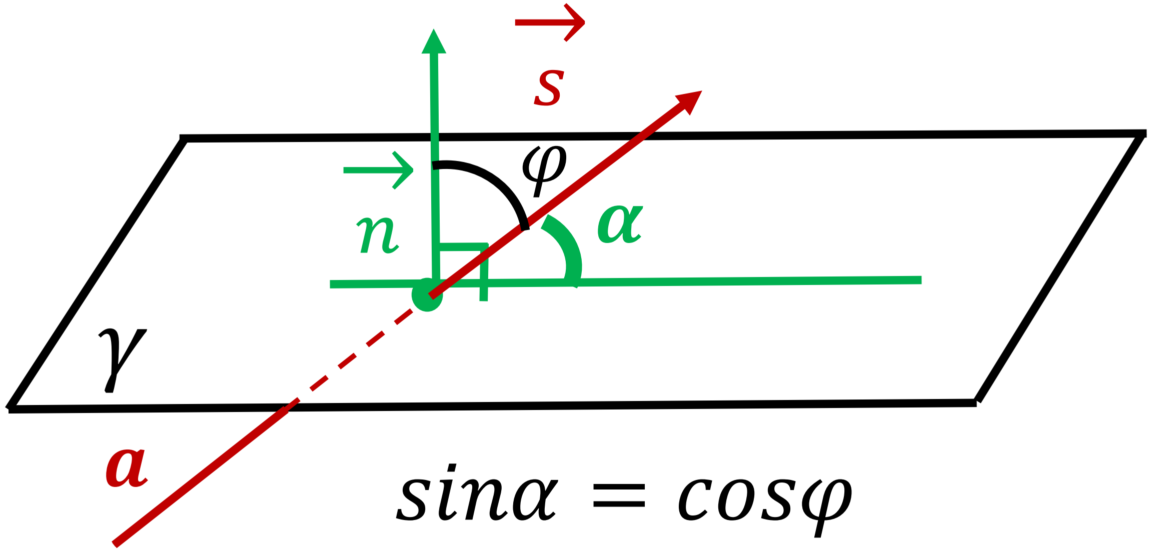
Или

$$\cos\varphi = \frac{|-1\cdot 0+\sqrt{3}\cdot 0+\sqrt{3}\cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$$

Угол между прямой и плоскостью





$$sin\alpha = cos\varphi$$

$$sin\alpha = \cos(90° - \varphi)$$

$$sin\alpha = |cos\varphi| = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$$

ЗАДАЧА 7 **Нахождение угла между прямой и плоскостью**

1. **Пишем координаты точек A и B.**

2. **Найти координаты вектора** $\overrightarrow{AB}$

3. **Пишем уравнение плоскости (CDE).**

4. **Из уравнения плоскости (CDE) выпишем координаты нормального вектора** $\overrightarrow{n}$.

5. **Найти скалярное произведение нормальных векторов .**

4. **Найти длины векторов** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{n}$.

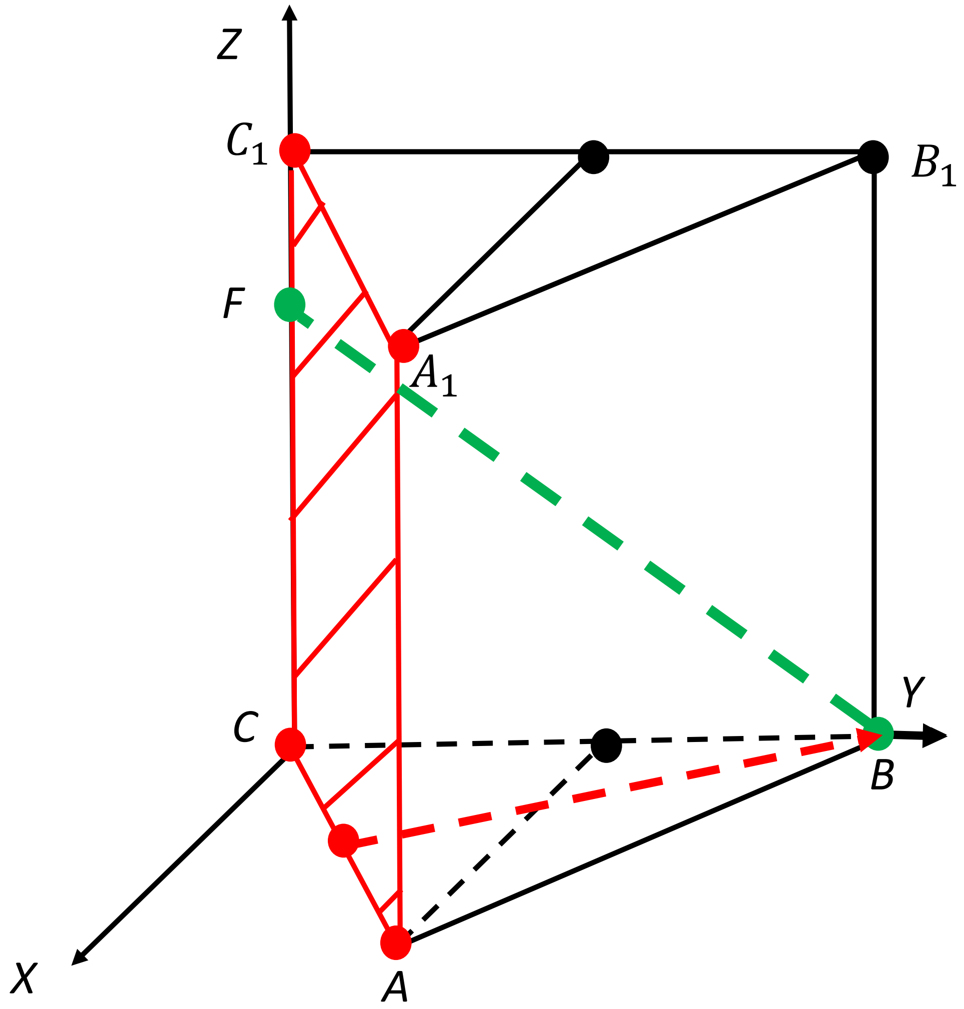
5. $$sin\alpha = \frac{\left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} \right|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$$

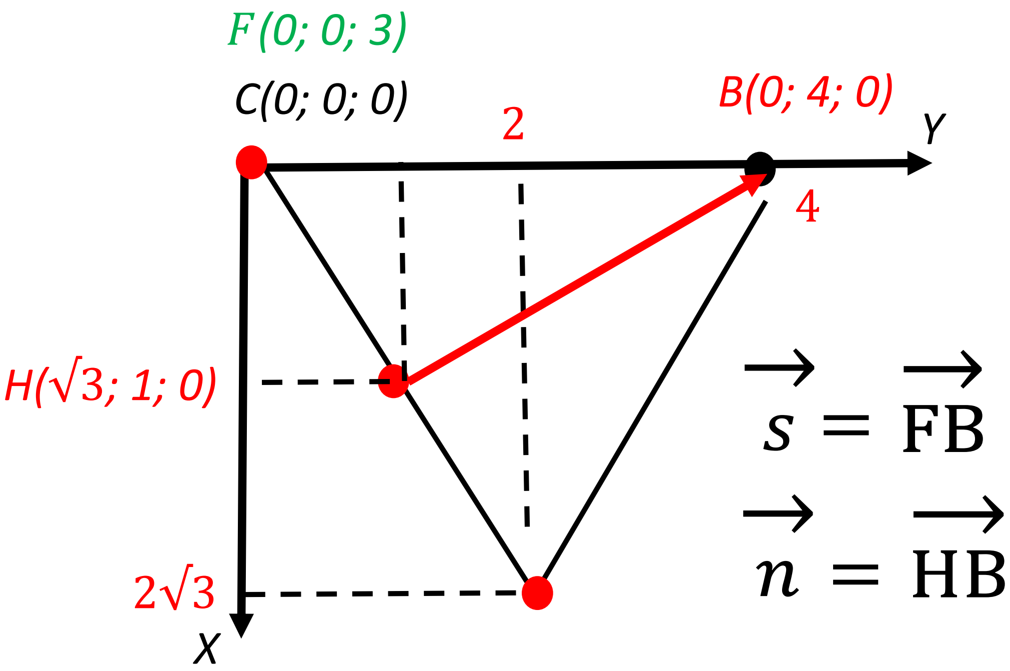
Если в задаче плоскость перпендикулярна какой нибудь прямой, то за нормальный вектор плоскости принимаем направляющий вектор этой прямой.

Нахождение угла между прямой FB и плоскостью (ACC_1)

Правильная треугольная призма.

$CF:FC_1=3:1$





$\vec{s} = \overrightarrow{FB}$

$\vec{n} = \overrightarrow{HB}$

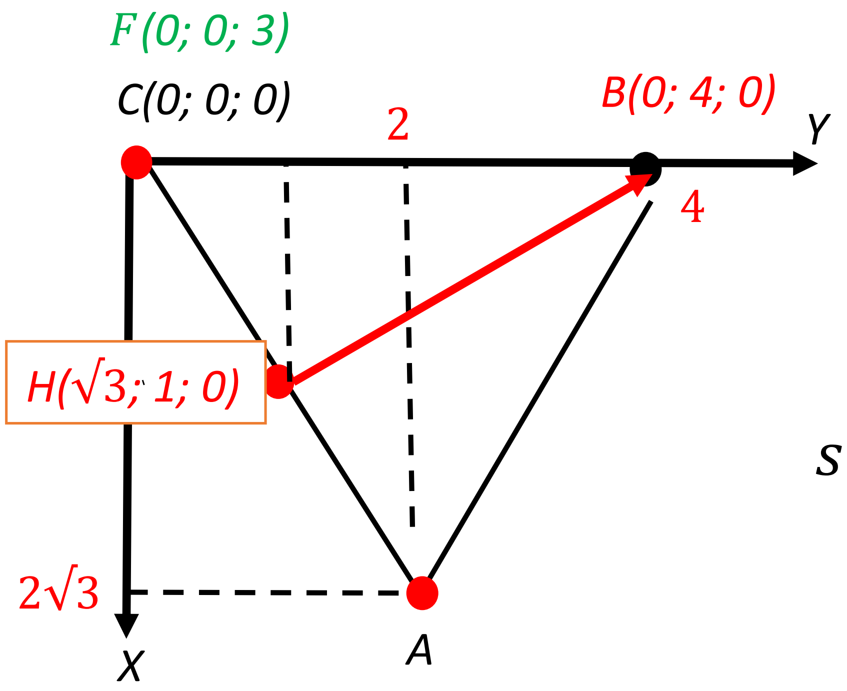
$\vec{n}\ \{-\sqrt{3}; 3; 0\}$

$\vec{s}\ \{0; 4; -3\}$

Нахождение угла между прямой FB и плоскостью (ACC_1)

Правильная треугольная призма.

$CF:FC_1=3:1$



$\vec{n}\ \{-\sqrt{3}; 3; 0\}$

$\vec{s}\ \{0; 4; -3\}$

$$\alpha = \left((FB), \widehat{(ACC_1)}\right)$$

$$\varphi = \widehat{\left(\vec{s}, \vec{n}\right)}$$

$$sin\alpha = |cos\varphi| = \frac{\left|\vec{s}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

$$sin\alpha = |cos\varphi| = \frac{\left|-\sqrt{3}\cdot 0 + 3\cdot 4 + 0\cdot(-3)\right|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(3)^2+(0)^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}}$$

$$sin\alpha = \frac{12}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}} = \frac{12}{6\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\alpha = arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$$